АКАДЕМИЯ НАУК СССР

Teoriia veroiatnostei i ee primeneniia

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

ТОМ I
ВЫПУСК
4

U. of I.L. LIBRARY
JUL 20 1971
CHICAGO CIRCLE

1956
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

ним для него будет лишь раздел 3.5. В дальнейших параграфах 7—11 мы отказываемся от параллельного изложения дискретного и общего случая, так как это потребовало бы слишком много места.

§ 2. Пример С. Н. Бернштейна

2.1. Построим пример, показывающий, что при $\alpha^{(n)} \sim cn^{-1/3}$ последовательности $S^{(n)}$ может иметь распределение, являющееся безгранично-делимым. Идея этого примера принадлежит С. Н. Бернштейну [2], однако мы приводим этот пример здесь, так как изложение в оригинальной работе С. Н. Бернштейна является не вполне четким, и, кроме того, в литературе не отмечалось, что возникающее там предельное распределение оказывается не безгранично-делимым. Постараемся также разъяснить еще раз в ходе построения примера, почему именно число $1/3$ играет экстремальную роль в центральной предельной теореме для неоднородных цепей.

2.2. Начнем с указания некоторых фактов, относящихся к однородным цепям Маркова. Эти факты будут полезны нам как в этом параграфе, так и в §§ 8 и 10. Дело в том, что однородные цепи будут служить нам как бы «кирпичиками» при построении различных примеров неоднородных цепей.

Рассмотрим однородную цепь Маркова с двумя состояниями E_1 и E_2, задаваемую матрицей вероятностей перехода

$$\begin{pmatrix} p, & 1-p \\ 1-p, & p \end{pmatrix}$$

(случай А) или матрицей вероятностей перехода

$$\begin{pmatrix} 1-p, & p \\ p, & 1-p \end{pmatrix}$$

(случай Б), с $[p^{-1}]$ моментами времени. Пусть S_p — число попаданий в состояния E_1. Фиксируем некоторое начальное распределение. Тогда

Случай А: *В смысле слабой сходимости*

$$\lim_{p\to 0} \mathbf{P}\left\{S_p - \left[\frac{[p^{-1}]+1}{2}\right] < x\right\} = F(x), \tag{2.1}$$

где $F(x)$ — собственная функция распределения, и

$$\lim_{p\to 0} \mathbf{D}S_p = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) = d < \infty. \tag{2.2}$$

Случай Б: *В смысле слабой сходимости*

$$\lim_{p\to 0} \mathbf{P}\{pS_p < x\} = G(x), \tag{2.3}$$

где $G(x)$ — собственная функция распределения, сосредоточенная на отрезке $[0, 1]$, и

$$\lim_{p\to 0} p^2 \mathbf{D}S_p = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dG(x) = \tilde{d} < \infty. \tag{2.4}$$

Утверждения, относящиеся к поведению самих функций распределения доказаны в нашей работе [12]. Результаты о поведении дисперсий не

были сформулированы явно в этой работе, хотя и могут быть без труда доказаны развитыми там методами.

Особенно важно для нас различие в нормировке в случаях А и Б. Наглядно это объясняется тем, что в случае А система почти все время перескакивает из E_1 в E_2 и обратно и лишь изредка задерживается в каком-либо состоянии. В этом случае S_p равно примерно $\frac{1}{2}p^{-1}$, и от этого среднего значения имеются случайные отклонения конечного порядка. В случае Б система почти все время остается в одном из состояний и лишь изредка меняет свое местопребывание. В частности, система может все время $[p^{-1}]$ провести в E_1 или же все время провести в E_2. Этим объясняется, что величина S_p имеет порядок p^{-1}.

2.3. Мы будем иметь теперь дело с неоднородными цепями Маркова с двумя состояниями E_1 и E_2. Из равенства (1.19) следует, что если матрица P имеет одно из двух следующих значений

$$\begin{pmatrix} \alpha, & 1-\alpha \\ 1-\alpha, & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1-\alpha, & \alpha \\ \alpha, & 1-\alpha \end{pmatrix},$$

где $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$, то $\alpha(P) = 2\alpha$.

Построим некоторым специальным образом такую цепь Маркова из двух состояний с n моментами времени, что нижняя грань ее коэффициентов эргодичности равна $\alpha^{(n)}$. Мы увидим, что это построение приводит к ненормальному предельному распределению для числа попаданий в E_1, которое будем обозначать через $S^{(n)}$, если $\alpha^{(n)} \sim n^{-1/3}$, и не приводит к нему при $\alpha^{(n)} n^{1/3} \to \infty$.

Положим

$$k_i^{(n)} = i\,[2\,(\alpha^{(n)})^{-1}]; \quad i = 1, \ldots, m_n, \tag{2.5}$$

где $k_{m_n}^{(n)} \leqslant n < k_{m_n+1}^{(n)}$. Определим далее матрицы вероятностей перехода $P_i^{(n)}$ как

$$P_i^{(n)} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1-\frac{\alpha^{(n)}}{2}, & \frac{\alpha^{(n)}}{2} \\ \frac{\alpha^{(n)}}{2}, & 1-\frac{\alpha^{(n)}}{2} \end{pmatrix} & \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots, k_1 - 1 \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \end{pmatrix} & \text{при} \quad i = k_j, \; j = 1, 2, \ldots, m_n \\ \begin{pmatrix} \frac{\alpha^{(n)}}{2}, & 1-\frac{\alpha^{(n)}}{2} \\ 1-\frac{\alpha^{(n)}}{2}, & \frac{\alpha^{(n)}}{2} \end{pmatrix} & \text{для всех остальных } i. \end{cases} \tag{2.6}$$

Смысл такого построения состоит в том, что на первом из отрезков $[1, k_1]$ соответствующая сумма $S_{1,k_1}^{(n)}$ имеет «максимально возможную величину», а на остальных отрезках суммы $S_{k_i, k_{i+1}}^{(n)}$ имеют «минимально возможные

величины», так что относительный привзнос суммы $S^{(n)}_{1,k_1}$ за малый промежуток времени $[1, k_1]$ в общую сумму $S^{(n)}$ является максимальным. Матрицы $P^{(n)}_{k_i}$ определены так, что величины $S^{(n)}_{k_i, k_{i+1}}$ оказываются независимыми при разных i*. Это облегчает изучение их суммы $S^{(n)}$. Число $2[(\alpha^{(n)})^{-1}]$ выбрано в качестве «длины секции» потому, что на расстояниях, бесконечно больших относительно $(\alpha^{(n)})^{-1}$, уже проявляются эргодические свойства цепи.

Из (2.4) следует, что дисперсия $\mathbf{D}S^{(n)}_{1,k_1} \sim 4\tilde{d}\,(\alpha^{(n)})^{-2}$. С другой стороны, из (2.2) и того факта, что на отрезке $[0, n]$ умещается примерно $\frac{1}{2} n\alpha^{(n)}$ отрезков длины $[2(\alpha^{(n)})^{-1}]$, следует, что $\mathbf{D}S^{(n)}_{k_1,n} \sim \frac{d}{2} n\alpha^{(n)}$. Как легко видеть, величины $(\alpha^{(n)})^{-2}$ и $n\alpha^{(n)}$ имеют один и тот же порядок при $\alpha^{(n)} \sim cn^{-1/3}$, а при $\alpha^{(n)} n^{1/3} \to \infty$ преобладающую роль в сумме $S^{(n)}$ играет величина $S^{(n)}_{k_1, n}$, которая является в свою очередь суммой независимых величин и поэтому, как нетрудно проверить, асимптотически нормальна.

Итак, пусть $\alpha^{(n)} \sim n^{-1/3}$. Тогда

$$\mathbf{D}\,S^{(n)}_{1,k_1} \sim 4\tilde{d}n^{-2/3},\ \mathbf{D}\,S^{(n)}_{k_1,n} \sim \frac{d}{2} n^{-2/3},\ \mathbf{D}\,S^{(n)} \sim \left(4\tilde{d} + \frac{d}{2}\right) n^{-2/3},$$

и величина $S^{(n)}$ имеет предельное распределение, являющееся композицией нормального распределения и распределения с функцией распределения $G(x)$, отличной от нормальной. По известной теореме Крамера (см. [20]) это распределение само отлично от нормального.

2.4. Остается еще показать, что полученное в примере Бернштейна предельное распределение не является безгранично делимым. Это распределение является композицией нормального распределения и распределения, сосредоточенного на отрезке. Как легко видеть, ограниченная случайная величина не может быть безгранично делимой. Поэтому нужный нам факт является частным случаем следующего утверждения: композиция нормального распределения с распределением, не являющимся безгранично делимым, также не является безгранично делимым распределением. Это утверждение доказано в работе Ибрагимова**.

§ 3. Свойства коэффициента эргодичности

3.1. В этом параграфе устанавливаются некоторые свойства коэффициента эргодичности, которые будут полезны нам в дальнейшем. Будем считать известными обозначения, введенные в разделах. 1.3, 1.4, 1,5.

В разделе 1.4 осталось недоказанным важное соотношение

$$1 - N(P) = \alpha(P), \qquad (1.5'')$$

---

* Этой деталью наше построение отличнс от первоначального построения Бернштейна. Однако это, конечно, не существенно.

** Ибрагимов И. А. Одна теорема из теории безгранично делимых законов. Теория вероятностей и ее применения, т. 1, вып. 4, стр. 485

показывающее эквивалентность двух определений коэффициента эргодичности. В разделе 1.4 было показано, что $1 - N(P) \leqslant \alpha(P)$. Проверим теперь, что выполнено и обратное неравенство. Пусть $\lambda \in L_\psi$ и пусть множества A и B образуют разложение в смысле Хана пространства Ψ относительно функции λ, т. е. пусть $A \in \mathfrak{R}$, $B \in \mathfrak{R}$, $A \cup B = \Psi$, $A \cap B = 0$ и для любого $\widetilde{A} \subset A$, $\widetilde{A} \in \mathfrak{R}$ функция $\lambda(\widetilde{A}) \geqslant 0$, для любого $\widetilde{B} \subset B$, $\widetilde{B} \in \mathfrak{R}$ функция $\lambda(\widetilde{B}) \leqslant 0$ (относительно существования такого разложения см. [34], стр. 121). Тогда, как легко видеть, $\lambda(A) = -\lambda(B) = \|\lambda\|$. Из определения числа $\alpha(P)$ (соотношение (1.5)) следует, что если положить для любого $\bar{R} \in \mathfrak{R}$

$$m(\bar{R}) = \inf_{\psi \in \Psi} P(\psi, \bar{R}), \tag{3.1}$$

то при любом $\psi \in \Psi$

$$|m(\bar{R}) - P(\psi, \bar{R})| \leqslant 1 - \alpha(P). \tag{3.2}$$

Пусть для определенности $P\lambda(\bar{R}) \geqslant 0$ (случай $P\lambda(\bar{R}) \leqslant 0$ рассматривается аналогичным образом). Тогда, используя (3.1) и (3.2), имеем

$$P\lambda(\bar{R}) = \int_\Psi P(\psi, \bar{R})\, d\lambda = \int_A P(\psi, \bar{R})\, d\lambda + \int_B P(\psi, \bar{R})\, d\lambda \leqslant \tag{3.3}$$

$$\leqslant \int_A P(\psi, \bar{R})\, d\lambda + \int_B m(\bar{R})\, d\lambda = \int_A [P(\psi, \bar{R}) - m(\bar{R})]\, d\lambda \leqslant [1 - \alpha(P)]\, \|\lambda\|.$$

Отсюда следует, что

$$\|P\lambda\| \leqslant [1 - \alpha(P)]\, \|\lambda\|. \tag{3.4}$$

Поэтому

$$N(P) \leqslant 1 - \alpha(P),$$

и соотношение (1.5″) доказано.

3.2. Получим теперь выражение для коэффициента эргодичности $\alpha(P)$, даваемое соотношением (1.5″).

Мы привели в разделе 1.4 без доказательства соотношение (1.15). Укажем теперь его вывод. Рассмотрим вполне аддитивную функцию множества $\lambda(B) = \mu_1(R) - \mu_2(R)$, $R \in \mathfrak{R}$ и пусть множества A и B образуют разложение пространства W в смысле Хана относительно функции λ. Положим

$$\bar{\nu}(R) = \mu_1(R \cap B) + \mu_2(R \cap A). \tag{3.5}$$

Из определения разложения в смысле Хана (см. 3.1) следует, что для любого $R \in \mathfrak{R}$ мера $\mu_1(R \cap A) \geqslant \mu_2(R \cap A)$ и $\mu_2(R \cap B) \geqslant \mu_1(R \cap B)$, а поэтому мера $\bar{\nu}(R)$ минорирует меры $\mu_1(R)$ и $\mu_2(R)$. С другой стороны, пусть $\nu(R)$ — некоторая мера, минорирующая меры μ_1 и μ_2. Тогда $\nu(A) \leqslant \mu_1(A)$ и $\nu(B) \leqslant \mu_2(B)$, а следовательно, $\nu(W) \leqslant \bar{\nu}(W)$. Таким образом мера $\bar{\nu}$ оказывается экстремальной мерой, для которой достигается верхняя грань в соотношении (1.14). Мы получили, что

$$\widetilde{\alpha}(\mu_1, \mu_2) = \mu_1(B) + \mu_2(A). \tag{3.6}$$

Как мы уже отмечали, $\|\mu_1 - \mu_2\| = \|\lambda\| = \lambda(A)$. Поэтому

$$\|\mu_1 - \mu_2\| = \mu_1(A) - \mu_2(A) = 1 - [\mu_1(B) + \mu_2(A)] = 1 - \widetilde{\alpha}(\mu_1, \mu_2), \quad (3.7)$$

и мы получили соотношение (1.15).

Выведем теперь интегральное выражение (1.16) для $\widetilde{\alpha}(\mu_1, \mu_2)$. Оно также является почти очевидным, если исходить из полученного выше соотношения (3.6). В самом деле, так как мера $\overline{\nu}$ является минорирующей, то для любого R

$$\overline{\nu}(R) \leqslant \min(\mu_1(R), \mu_2(R))$$

и следовательно, интегральные суммы в (1.16) не меньше, чем $\overline{\nu}(W)$. С другой стороны, если положить в (1.16) $m = 2$, $S_1 = A$, $S_2 = B$, то

$$\min(\mu_1(S_1), \mu_2(S_1)) + \min(\mu_1(S_2), \mu_2(S_2)) = \mu_2(S_1) + \mu_1(S_2),$$

и мы получили искомое соотношение (1.16).

3.3. Получим теперь явное выражение (1.19) для коэффициента эргодичности в случае счетной цепи. В соответствии с (1.5) для этого достаточно показать, что если $\{P_j\}$, $\{\overline{P}_j\}$ — два распределения вероятностей на состояниях E_j, то

$$\widetilde{\alpha}(\{P_j\}, \{\overline{P}_j\}) = \sum_{j=1}^{\infty} \min(P_j, \overline{P}_j). \quad (3.8)$$

Заметим, что величина $\widetilde{\alpha}(\mu_1, \mu_2)$ не изменится, если допустить в (1.16) разбиения не только на конечное, но и на счетное число слагаемых S_i. Заметим далее, что сумма, стоящая под знаком нижней грани в (1.16), может лишь увеличиться, если заменить разбиение $\{S_i\}$ некоторым его подразбиением. Так как разбиение $S_i = E_i$ является подразбиением любого разбиения, то мы получаем из (1.16) соотношение (3.8).

3.4. Пусть переходные функции $P_i(\omega, A)$; $i = 1, 2, \ldots, n-1$ задают цепь Маркова с n моментами времени. Определим вероятности перехода за интервал времени (k, l); $1 \leqslant k < l \leqslant n$ как

$$P_{k,l}(\omega, A) = \int_{\Omega_{k+1}} P_k(\omega, d\omega_{k+1}) \int_{\Omega_{k+2}} P_{k+1}(\omega_{k+1}, d\omega_{k+2}) \ldots$$
$$\ldots \int_{\Omega_{l-1}} P_{l-2}(\omega_{l-2}, d\omega_{l-1}) \int_{A} P_{l-1}(\omega_{l-1}, d\omega_l), \quad (3.9)$$

где $\omega \in \Omega_k$, $A \in \mathfrak{A}_l$. Положим

$$\alpha_{kl} = \alpha(P_{kl}). \quad (3.10)$$

Тогда имеет место следующее простое, но очень важное для нас соотно-

шение: при любых $1 \leqslant k < l < m \leqslant n$

$$1 - \alpha_{km} \leqslant (1 - \alpha_{kl})(1 - \alpha_{lm}). \tag{3.11}$$

В самом деле, если рассматривать переходные вероятностные функции P_{kl} как операторы, действующие в пространстве вполне аддитивных функций множества (см. раздел 1.4), то

$$P_{km} = P_{kl}P_{lm}, \tag{3.12}$$

и $1 - \alpha_{km}$ — это норма оператора P_{km}, рассматриваемого как оператор на подпространстве L, а норма произведения операторов не превосходит произведение норм.

3.5. Учитывая интересы читателя, который желает ограничиться лишь случаем счетной цепи, мы дадим теперь вывод результатов предыдущего раздела, непосредственно опирающийся на определение коэффициента эргодичности (1.19).

Пусть задана неоднородная цепь Маркова с n моментами времени. Обозначим через ${}_{kl}p_{ij}$ условную вероятность, находясь в момент времени k в состоянии E_i, оказаться в момент времени $l\,(l > k)$ в состоянии E_j. Пусть ${}_{kl}P$ — матрица вероятностей $\{{}_{kl}p_{ij}\}$. Положим

$$\alpha_{kl} = \alpha({}_{kl}P). \tag{3.13}$$

Мы хотим показать, что при любых $1 \leqslant k < l < m \leqslant n$

$$1 - \alpha_{km} \leqslant (1 - \alpha_{kl})(1 - \alpha_{lm}). \tag{3.14}$$

Пусть $\mathfrak{G}$ — линейное пространство таких бесконечномерных векторов $Q\{q_i\}$; $i = 1, 2, \ldots$, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |q_i| < \infty$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} q_i = 0$. Если $U = \{u_{ij}\}$ — некоторая стохастическая матрица и $Q \in \mathfrak{G}$, то $UQ \in \mathfrak{G}$. Назовем нормой вектора $Q \in \mathfrak{G}$ число *

$$\|Q\| = \sum_{i=1}^{\infty} |q_i| = 2\sum_{i=1}^{\infty} (q_i)^+ = -2\sum_{i=1}^{\infty} (q_i)^-. \tag{3.15}$$

Положим

$$\alpha(Q) = \inf_{i,\,m} \sum_{j=1}^{\infty} \min(u_{ij}, u_{mj}). \tag{3.16}$$

Докажем следующую лемму, из которой получим нужное соотношение (3.15).

Лемма 1. *Для любой стохастической матрицы* U

$$\sup \frac{\|UQ\|}{\|Q\|} = 1 - \alpha(U), \tag{3.17}$$

где верхняя грань берется по всем $Q \in \mathfrak{G}$.

---

* Мы полагаем $(a)^+ = \max(a, 0)$ и $(a)^- = \min(a, 0)$.

Доказательство. Пусть вектор Q таков, что отличны от нуля только две его компоненты $q_{i_1} = \frac{\|Q\|}{2} = \lambda$ и $q_{i_2} = -\lambda$. Тогда

$$\|UQ\| = 2\sum_{k=1}^{\infty}(q_{i_1}u_{i_1k} + q_{i_2}u_{i_2k})^+ = \|Q\|\left(\sum_{k=1}^{\infty}(u_{i_1k} - u_{i_2k})^+\right) =$$

$$= \|Q\|\left\{\sum_{k=1}^{\infty}[u_{i_1k} - \min(u_{i_1k}, u_{i_2k})]\right\} = \|Q\|\left[1 - \sum_{k=1}^{\infty}\min(u_{i_1k}, u_{i_2k})\right] \leqslant$$

$$\leqslant [1 - \alpha(U)]\,\|Q\|. \tag{3.18}$$

Любой вектор $Q \in \mathfrak{G}$ можно представить в виде абсолютно сходящейся суммы $Q = \widetilde{Q}_1 + \widetilde{Q}_2 + \ldots$ векторов $\widetilde{Q}_j \in \mathfrak{G}$ так, чтобы у каждого из векторов $\widetilde{Q}_j$ были отличны от нуля лишь две компоненты и чтобы $\|Q\| = \|\widetilde{Q}_1\| + \|\widetilde{Q}_2\| + \ldots$. В соответствии с (3.18)

$$\|UQ\| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\|U\widetilde{Q}_i\| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\|\widetilde{Q}_j\|\,[1 - \alpha(U)] = [1 - \alpha(U)]\,\|Q\|. \tag{3.19}$$

С другой стороны для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать числа $i_0 \neq m_0$ так, чтобы

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty}\min(u_{i_0,j}, u_{m_0,j}) - \alpha(U)\right| \leqslant \varepsilon. \tag{3.20}$$

Если взять в качестве вектора Q_0 вектор с компонентами $q_{i_0} = \lambda$, $q_{m_0} = -\lambda$ и всеми остальными компонентами равными нулю, то из (3.18) будет следовать, что

$$\|UQ_0\| \geqslant \|Q_0\|\,[1 - \alpha(U) - \varepsilon]. \tag{3.21}$$

Из (3.19) и (3.21) вытекает лемма 1. Отметим, что соотношение (3.21) показывает, что верхняя грань в (3.17) достигается на векторах Q, у которых отличны от нуля лишь две координаты, так что

$$1 - \alpha(U) = \frac{1}{2}\sup_{i,j}\sum_{k=1}^{\infty}|u_{ik} - u_{jk}|. \tag{3.22}$$

Заметим, что если обозначить через ${}_{kl}P$ стохастическую матрицу вероятностей $\{{}_{kl}p_{ij}\}$, то

$${}_{kl}P \cdot {}_{lm}P = {}_{km}P. \tag{3.23}$$

Из (3.23) и леммы 1 следует сразу искомое соотношение (3.14).

3.6. Пусть так же как и в предыдущем разделе задана счетная цепь Маркова с n моментами времени. Пусть задано $2m$ моментов времени $0 \leqslant k_1 < l_1 < k_2 < l_2 < \ldots < k_m < l_m \leqslant n$. В отличие от того, как это делалось раньше, нам будет удобно теперь различать состояния системы в разные моменты времени. Обозначим поэтому через ${}_kE_j$; $j = 1, 2, \ldots$ совокупность состояний системы в k-й момент времени ($k = 1, 2, \ldots, n$). Естественным образом можно сопоставить заданной цепи новую цепь с m моментами времени, состояниями которой в r-й момент будут после-

довательности

$$({}_{k_r}E_{j_1},\ {}_{k_r+1}E_{j_2},\ \ldots,\ {}_{l_r}E_{j_{l_r-k_r+1}})$$

при всевозможных $j_1, j_2, \ldots, j_{l_r-k_r+1}$). Нам будет полезен в дальнейшем следующий простой факт: если обозначить через $\widetilde{P}_r$; $r = 1, 2, \ldots, m-1$ стохастические матрицы переходных вероятностей новой цепи, то коэффициент эргодичности матрицы $\widetilde{P}_r$ равен

$$\alpha(\widetilde{P}_r) = \alpha_{l_r,\, k_{r+1}}. \tag{3.24}$$

В самом деле, это становится очевидным, если учесть, что по определению $\alpha_{l_r, k_{r+1}} = \alpha({}_{l_r}, {}_{k_{r+1}}P)$ и, выписав явным образом элементы матрицы $\widetilde{P}_r$, использовать соотношение (3.22).

3.7. Получим теперь результаты предыдущего раздела в более общей обстановке. Считая заданной цепь Маркова с n моментами времени, используем обозначения разделов 1.3 и 1.4.

Пусть задано $2m$ моментов времени $0 \leqslant k_1 < l_1 < k_2 < l_2 < \ldots < k_m < l_m \leqslant n$. В качестве пространств $\widetilde{\Omega}_r$; $r = 1, \ldots, m$ состояний новой цепи возьмем декартовы произведения $\Omega_{k_r} \times \Omega_{k_r+1} \times \ldots \times \Omega_{l_r}$, а в качестве основных σ-алгебр $\widetilde{\mathfrak{A}}_r$ возьмем σ-алгебры $\mathfrak{A}_{k_r} \times \mathfrak{A}_{k_r+1} \times \ldots \times \mathfrak{A}_{l_r}$. Переходные вероятности $\widetilde{P}_r(\omega, A)$, $\omega \in \widetilde{\Omega}_r, A \in \widetilde{\mathfrak{A}}_{r+1}$ новой цепи определим как

$$\widetilde{P}_r(\omega, A) = \int P_{l_r k_{r+1}}(\omega_{l_r}, dx_{k_r+1}) \int P_{k_{r+1}}(x_{k_r+1}, dx_{k_r+1+1}) \ldots \int P_{l_{r+1}-1}(x_{l_{r+1}-1}, dx_{l_{r+1}}),$$
$$(x_{k_r+1}, x_{k_r+1+1}, \ldots, x_{l_{r+1}}) \in A, \tag{3.25}$$

где $\omega = (\omega_{k_r}, \omega_{k_r+1}, \ldots, \omega_{l_r})$. Мы хотим показать, что

$$\alpha(\widetilde{P}_r) = \alpha_{l_r,\, k_{r+1}}. \tag{3.26}$$

Для любой меры μ, заданной на $\widetilde{\mathfrak{A}}_r$, мы назовем проекцией $\bar{\mu}$ на $\mathfrak{A}_{l_r}$ меру, получающуюся из μ, если рассматривать μ как функцию, определенную лишь на $\mathfrak{A}_{l_r}$. Далее любой мере μ, заданной на $\mathfrak{A}_{k_r+1}$, сопоставим меру $Q\mu$, заданную на $\widetilde{\mathfrak{A}}_{r+1}$ и определенную как

$$Q\mu(A) = \int \mu(dx_{k_r+1}) \int P_{k_{r+1}}(x_{k_r+1}, dx_{k_r+1+1}) \ldots \int P_{l_{r+1}-1}(x_{l_{r+1}-1}, dx_{l_{r+1}}), \tag{3.27}$$
$$(x_{k_r+1}, x_{k_r+1+1}, \ldots, x_{l_{r+1}}) \in A.$$

Из (3.25) следует сразу, что если мера μ задана на $\widetilde{\mathfrak{A}}_r$ и $\bar{\mu}$ — ее проекция на $\mathfrak{A}_{l_r}$, то $\widetilde{P}_r\mu = QP_{l_r k_{r+1}}\bar{\mu}$. Заметим далее, что если вероятностные меры μ_1 и μ_2 определены на $\mathfrak{A}_{k_r+1}$, то $\|\mu_1 - \mu_2\| = \|Q\mu_1 - Q\mu_2\|$. В самом деле, неравенство $\|\mu_1 - \mu_2\| \geqslant \|Q\mu_1 - Q\mu_2\|$ следует из того, что оператор Q может быть задан при помощи переходной вероятностной функции.

Обратное соотношение очевидно, если учесть, что $\mathfrak{A}_{k_{r+1}} \subset \widetilde{\mathfrak{A}}_{r+1}$ и на $\mathfrak{A}_{k_{r+1}}$ мера $Q\mu$ сводится к мере μ. Отсюда следует, что $\alpha(QP_{l_r, k_{r+1}}) = \alpha(P_{l_r, k_{r+1}})$. Чтобы доказать (3.26), остается заметить, что для любых двух вероятностных мер $\mu_1 \in \widetilde{\mathfrak{A}}_r$ и $\mu_2 \in \widetilde{\mathfrak{A}}_r$ имеет место неравенство $\|\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2\| \leqslant \|\mu_1 - \mu_2\|$ и что с другой стороны для любой меры $\mu \in \mathfrak{A}_{l_r}$ найдется мера $\nu \in \widetilde{\mathfrak{A}}_r$, такая, что $\bar{\nu} = \mu$.

§ 4. Оценка дисперсии снизу

4.1. Основным содержанием этого параграфа является доказательство следующей леммы 2. Важность этой леммы была выяснена в разделе 1.11. Кроме того, оценки дисперсии, полученные в этом разделе и сведенные во вспомогательные леммы, будут существенно использоваться в §§ 6 и 7. Мы используем обозначения, введенные в § 1.

Лемма 2. *Пусть дисперсии всех величин* $X_i^{(n)}$ *равномерно ограничены снизу, т. е. пусть при некотором* c

$$0 < c \leqslant \mathbf{D} X_i^{(n)} < \infty, \tag{4.1}$$

и пусть

$$\alpha^{(n)} = \min_{i=1, 2, \ldots, n} \alpha_i^{(n)}, \tag{4.2}$$

(где коэффициент эргодичности $\alpha_i^{(n)}$ *определен в разделе* (1.5)). *Тогда*

$$\mathbf{D} S^{(n)} \geqslant \frac{c}{100} n\alpha^{(n)}. \tag{4.3}$$

Основные идеи доказательства этой леммы указаны в разделе 1.11. Изложим сначала доказательство этой леммы для случая счетной цепи Маркова, а затем укажем те изменения, которые нужно сделать для переноса доказательства на общий случай. Такой план изложения принят из-за того, что доказательство в общем случае основано на абстрактной теории условных математических ожиданий Колмогорова [17] и рассуждения становятся в результате менее наглядными. Читатель, готовый ограничиться лишь счетным случаем, может опустить разделы 4.6—4.10.

4.2. Начнем с одного замечания общего характера. Пусть ξ — некоторая случайная величина, заданная на дискретном пространстве элементарных событий. Пусть $R_1, R_2, \ldots$ — некоторая совокупность $\mathfrak{R}$ непересекающихся событий, дающих в сумме все пространство элементарных исходов. Обычным образом определяется условное распределение величины ξ при каждом из условий R_k. Определим $\mathbf{M}(\xi \mid R_k)$ и $\mathbf{D}(\xi \mid R_k)$ соответственно как математическое ожидание и дисперсию этого условного распределения. Определим, наконец, $\bar{D}(\xi \mid \mathfrak{R})$ как дисперсию случайной величины $\mathbf{M}(\xi \mid R_k)$, а $\tilde{D}(\xi \mid \mathfrak{R})$ как математическое ожидание случайной величины $\mathbf{D}(\xi \mid R_k)$, т. е.

$$\begin{aligned} \bar{D}(\xi \mid \mathfrak{R}) &= \sum_{k=1}^{\infty} P\{R_k\} \mathbf{D}(\xi \mid R_k), \\ \tilde{D}(\xi \mid \mathfrak{R}) &= \sum_{k=1}^{\infty} P\{R_k\} [\mathbf{M}(\xi \mid R_k) - \mathbf{M}\xi]^2. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Тогда элементарным образом проверяется следующее тождество

$$\mathbf{D}\,\xi = \bar{D}\,(\xi \mid \mathfrak{R}) + \tilde{D}\,(\xi \mid \mathfrak{R}). \tag{4.5}$$

(Это тождество играет фундаментальную роль в дисперсионном анализе, см. [20], стр. 585).

4.3. Рассмотрим величины $X_1, \ldots, X_n$, связанные в цепь Маркова со счетным числом состояний $\{E_i\}$. (Верхний индекс серии n остается неизменным во всех рассуждениях этого параграфа и поэтому будет опускаться). Без ограничения общности можно считать $\mathbf{M}X_i = 0$. Положим $S_k = X_1 + \ldots + X_k$ и возьмем в качестве совокупности $\tilde{\mathfrak{A}}_k$ совокупность событий $\{A_k^i\}$; $i = 1, \ldots, n$, где A_k^i — это событие, состоящее в том, что в момент времени k система находится в состоянии E_i. Обозначим для краткости

$$\gamma_k = \mathbf{M}\,\{S_k \mid \tilde{\mathfrak{A}}_k\},\ \delta_k = S_k - \gamma_k. \tag{4.6}$$

Положим также

$$\begin{aligned} \bar{D}_k &= \bar{D}\,(S_k \mid \tilde{\mathfrak{A}}_k) = \mathbf{D}\delta_k, \\ \tilde{D}_k &= \tilde{D}\,(S_k \mid \tilde{\mathfrak{A}}_k) = \mathbf{D}\gamma_k. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Тогда, очевидно, $\bar{D}_k + \tilde{D}_k = \mathbf{D}S_k$. Докажем следующую лемму, которая окажется нам полезной как в этом параграфе, так и в дальнейшем:

Лемма 3. *При любых $k < l$ имеет место соотношение*

$$\bar{D}_l = \bar{D}_k + \bar{D}\,(\gamma_k + X_{k+1} + \ldots + X_l \mid \tilde{\mathfrak{A}}_l). \tag{4.8}$$

Доказательство. Очевидно, что

$$S_l = \gamma_k + \delta_k + X_{k+1} + \ldots + X_l. \tag{4.9}$$

Наша ближайшая цель показать, исходя из (4.9), что

$$\bar{D}_l = \bar{D}\,(\delta_k \mid \tilde{\mathfrak{A}}_k) + \bar{D}\,(\gamma_k + X_{k+1} + \ldots + X_l \mid \tilde{\mathfrak{A}}_l). \tag{4.10}$$

По определению, при любом i математическое ожидание $\mathbf{M}\,(\delta_k \mid A_k^l) = 0$. Далее, в силу того, что процесс марковский, для любого набора индексов $i_1, i_2, \ldots, i_{l-k+1}$

$$\mathbf{M}\,(\delta_k \mid A_k^{i_1} \cap A_{k+1}^{i_2} \cap \ldots \cap A_l^{i_{l-k+1}}) = 0. \tag{4.11}$$

При любом из условий $A_k^{i_1} \cap A_{k+1}^{i_2} \cap \ldots \cap A_l^{i_{l-k+1}}$ случайная величина $\gamma_k + X_{k+1} + \ldots + X_l$ имеет постоянное значение. Из двух последних фактов следует, что при любом из этих условий, а значит и при любом из условий A_l^j; $j = 1, 2, \ldots$ две случайные величины δ_k и $\gamma_k + X_{k+1} + \ldots + X_l$ не коррелированы. Поэтому, видим из (4.9), что при любом j

$$\mathbf{D}(S_l \mid A_l^j) = \mathbf{D}(\delta_k \mid A_l^j) + \mathbf{D}(\gamma_k + X_{k+1} + \ldots + X_l \mid A_l^j), \quad (4.12)$$

откуда следует сразу (4.10).

Для того чтобы доказать лемму, нам осталось еще показать, что

$$\overline{D}(\delta_k \mid \mathfrak{A}_l) = D(\delta_k \mid \mathfrak{A}_k) = D_k. \quad (4.13)$$

Для этого заметим, что если для некоторой величины ξ и системы событий $\mathfrak{R}$ математическое ожидание $\mathbf{M}(\xi \mid \mathfrak{R}) = 0$, то, как следует, например, из (4.5),

$$\overline{D}(\xi \mid \mathfrak{R}) = \mathbf{D}\xi. \quad (4.14)$$

Отсюда видим сразу, что $\overline{D}(\delta_k \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_k) = \mathbf{D}\delta_k = \overline{D}_k$. Заметим, что, как видно из (4.11),

$$\mathbf{M}(\delta_k \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_l) = 0. \quad (4.15)$$

Отсюда вытекает (4.13), а следовательно, и основное утверждение леммы.

Отметим следующий факт, который нам придется использовать в § 6:

$$\gamma_l = \mathbf{M}(X_{k+1} + X_{k+2} + \ldots + X_l + \gamma_k \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_l). \quad (4.16)$$

В самом деле по определению $S_k = \gamma_k + \delta_k$. Поэтому

$$\gamma_l = \mathbf{M}(\delta_k \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_l) + \mathbf{M}(\gamma_k + X_{k+1} + \ldots + X_l \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_l)$$

и из (4.15) следует (4.16).

Докажем теперь следующую лемму:

Лемма 4. *Пусть выполнены условия леммы* 2, *тогда*

$$\overline{D}_k \geqslant \overline{D}_{k-1} + \tfrac{1}{2}\alpha_{k-1}\widetilde{D}_{k-1}. \quad (4.17)$$

Эта лемма показывает, что в то время как $\mathbf{D}S_k$ изменяется при росте k немонотонным образом, величина $\overline{D}_k$ может лишь возрастать. Более того, лемма позволяет оценить быстроту этого роста.

Применив лемму 3, видим, что

$$\overline{D}_k = \overline{D}_{k-1} + \overline{D}(\gamma_k + X_k \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_k).$$

При каждом из условий A_k^i величина X_k имеет постоянное значение. Следовательно, $\overline{D}(\gamma_{k-1} + X_k \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_k) = \overline{D}(\gamma_{k-1} \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_k)$ и для доказательства леммы надо показать, что

$$\overline{D}(\gamma_{k-1} \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_k) \geqslant \tfrac{1}{2}\alpha_{k-1}\widetilde{D}_{k-1} = \tfrac{1}{2}\alpha_{k-1}\mathbf{D}\gamma_{k-1}. \quad (4.18)$$

4.4. Как легко видеть, для того, чтобы доказать неравенство (4.18), а следовательно, и лемму 4, достаточно доказать следующее более общее утверждение, которое будет использовано также в § 7.

Пусть задана счетная цепь Маркова с двумя моментами времени, причем матрица вероятностей перехода имеет коэффициент эргодичности α. Пусть случайная величина X, имеющая конечную дисперсию, функцио-

нально зависит от состояния системы в первый момент времени. Обозначим через A_k^i ($i = 1, 2, \ldots; k = 1, 2$) события, состоящие в том, что в k-й момент времени система находится в E_i. Тогда, если обозначить через $\mathfrak{A}_2$ систему событий $\{A_2^i\}$, то

$$\overline{D}\{X \mid \mathfrak{A}_2\} \geqslant \frac{1}{2}\alpha \mathbf{D}X. \tag{4.19}$$

Положим $p^i = P\{A_1^i\}$ и $p_{ij} = P\{A_2^j \mid A_1^i\}$. Величину X удобно записывать как функцию $X(E_i)$, где E_i — значение случайной величины X, которое она принимает, если осуществилось событие A_1^i. Обозначим через m медиану случайной величины X и через H совокупность состояний E_i, для которых $X(E_i) \leqslant m$. Как известно $\mathbf{M}(X-m)^2 \geqslant \geqslant \mathbf{D}X$. Отсюда выполнено одно из двух неравенств: неравенство

$$\sum_{E_i \in H} p_i [X(E_i) - m]^2 \geqslant \frac{1}{2}\mathbf{D}X \tag{4.20}$$

или аналогичное неравенство для $E_i \in H$. Мы будем считать для определенности, что верно (4.20). Обозначим, наконец, через p_H вероятность того, что система находится в H в 1-й момент времени, и через p_{Hi} — условную вероятность оказаться во 2-й момент времени в E_i, находясь в 1-й момент времени в H. Из соотношения

$$p_{Hi} = \sum_{E_j \in H} \frac{p_j}{p_H} p_{ji}$$

и определения коэффициента эргодичности (1.19) следует, что при всех

$$\sum_{i=1}^{\infty} \min(p_{Hi}, p_{ji}) \geqslant \alpha. \tag{4.21}$$

Обозначим слагаемые суммы (4.21) через a_{ji}. Так как $p_H \geqslant \frac{1}{2}$, то из определения a_{ji} следует, что при любом i

$$\sum_{E_j \in H} p_j a_{ji} \leqslant p_H p_{Hi}. \tag{4.22}$$

Из (4.21) вытекает, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_j a_{ji} \geqslant \alpha p_j. \tag{4.23}$$

Наконец,

$$p_j p_{ji} \geqslant p_j a_{ji}. \tag{4.24}$$

Мы хотим показать, что при любом i

$$P\{A_2^i\}\mathbf{D}\{X \mid A_2^i\} \geqslant \sum_{E_j \in H} p_j a_{ji} [X(E_j) - m]^2. \tag{4.25}$$

Пусть M^i — условное математическое ожидание X при условии A_2^i. Так как из (4.24) следует, что вероятность одновременного осуществления

событий A_1^j и A_2^i не меньше $p_j a_{ji}$ и при $E_j \in H$ величина $X(E_j) \geqslant m$, то это соотношение очевидно при $M^i < m$. Предположим поэтому, что $M^i \geqslant m$. Тогда, так как вероятность одновременного осуществления событий A_{i2} и $\{X \leqslant m\}$ равна $p_H p_{Hi}$, то из (4.22) и (4.24) следует, что

$$P\{A_\xi^t\}\,\mathbf{D}\{X \mid A_2^t\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_j p_{ji}[X(E_j) - M^i]^2 \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{E_j \overline{\in} H} p_j p_{ji}[X(E_j) - M]^2 + p_H p_{Hi}(M^i - m)^2 \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{E_j \overline{\in} H} p_j a_{ji}\{[X(E_j) - M]^2 + (M - m)^2\} \geqslant \sum_{E_j \overline{\in} H} p_j a_{ji}[X(E_j) - m]^2,$$

и мы получили (4.25). Суммируя (4.25) по всем i и учитывая (4.23), а затем (4.20), получаем

$$\overline{D}\{X \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_2\} \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{E_j \overline{\in} H} p_j a_{ji}[X(E_j) - m]^2 \geqslant$$

$$\geqslant \alpha \sum_{E_j \overline{\in} H} p_j [X(E_j) - m]^2 \geqslant \frac{\alpha}{2}\,\mathbf{D}X. \tag{4.26}$$

Итак, соотношение (4.18) доказано. Вместе с тем доказана лемма 4.

4.5. Нам нужно оценить теперь снизу $\widetilde{D}_k$.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия леммы 2, и цепь содержит счетное число состояний, тогда при любом k*

$$\min(\widetilde{D}_{k-1}, \widetilde{D}_k) \geqslant \frac{1}{4}c. \tag{4.27}$$

Доказательство. Используем некоторые обозначения и результаты, содержащиеся в разделе 4.3. По определению $\widetilde{D}_{k-1} = \mathbf{D}\gamma_{k-1}$. Используем тот факт, что $S_k = \gamma_{k-1} + \delta_{k-1} + X_k$. Из (4.11) следует, что

$$\mathbf{M}\{\delta_{k-1} \mid A_k^j\} = 0. \tag{4.28}$$

Очевидно, что $\mathbf{M}\{X_k \mid A_k^j\} = X_k$, так что из (4.28) следует, что

$$X_k = \gamma_k - \mathbf{M}\{\gamma_{k-1} \mid A_k^j\}. \tag{4.29}$$

Предположим теперь в противоречии с утверждением леммы, что $\mathbf{D}\gamma_k < \frac{1}{4}c$ и $\mathbf{D}\gamma_{k-1} < \frac{1}{4}c$. Тогда из общего тождества (4.5) видим, что $\mathbf{D}[\mathbf{M}\{\gamma_{k-1} \mid A_k^j\}] \geqslant \widetilde{D}(\gamma_{k-1} \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_k\} < \frac{1}{4}c$. Но если для двух случайных величин ξ и η дисперсии $\mathbf{D}\xi < a$ и $\mathbf{D}\eta < a$, то

$$\mathbf{D}(\xi + \eta) \leqslant 2(\mathbf{D}\xi + \mathbf{D}\eta) \leqslant 4a.$$

Применяя это соображение к (4.29), получаем, что $\mathbf{D}X_k < c$, а это противоречит условию леммы (4.1). Лемма 4 доказана.

Из леммы 4 следует, что

$$\sum_{k=1}^{n} \widetilde{D}_k \geqslant \frac{n}{3} \cdot \frac{1}{4} c = \frac{cn}{12}, \tag{4.30}$$

а из (4.30) и леммы 3 следует очевидным образом основная лемма 2.

4.6. Докажем теперь лемму 2 для случая цепи с любым множеством состояний. Мы будем использовать определения и обозначения, введенные в разделах 1.3 и 1.4. Будем также применять общую теорию Колмогорова условных математических ожиданий. В частности, будем считать известными свойства условных математических ожиданий, приводимые в §§ 7, 8, 10 главы 1 книги Дуба [14] и свойства марковских процессов, излагаемые в § 6 главы II той же книги.

4.7. Пусть задано некоторое пространство элементарных событий Ω, на нем σ-алгебра измеримых множеств $\mathfrak{A}$ и распределение вероятностей $\mathbf{P}\{A\}$, $A \in \mathfrak{A}$. Пусть задана некоторая случайная величина ξ. Пусть, кроме того, задана некоторая σ-подалгебра $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{A}$. Условное математическое ожидание любой случайной величины ξ относительно σ-алгебры $\mathfrak{R}$ мы будем обозначать $\mathbf{M}(\xi \mid \mathfrak{R})$. Определим условную дисперсию величины ξ относительно σ-алгебры $\mathfrak{R}$ как

$$\mathbf{D}(\xi \mid \mathfrak{R}) = \mathbf{M}\{[\xi - \mathbf{M}(\xi \mid \mathfrak{R})]^2 \mid \mathfrak{R}\}. \tag{4.31}$$

Очевидно, что в дискретном случае это определение совпадает с обычным (см. раздел 4.1). Отметим полезное соотношение, хорошо известное в дискретном случае

$$\mathbf{D}(\xi \mid \mathfrak{R}) = \mathbf{M}(\xi^2 \mid \mathfrak{R}) - [\mathbf{M}(\xi \mid \mathfrak{R})]^2. \tag{4.32}$$

Это соотношение выводится из (4.31) очевидными алгебраическими преобразованиями. При этом надо учесть, что $\mathbf{M}(\xi \mid \mathfrak{R})$ и $\mathbf{M}(\xi^2 \mid \mathfrak{R})$ являются случайными величинами, измеримыми относительно $\mathfrak{R}$, и поэтому могут быть вынесены из-под знака условного математического ожидания $\mathbf{M}(\cdot \mid \mathfrak{R})$. Определим далее аналогично (4.4)

$$\begin{aligned} \overline{D}(\xi \mid \mathfrak{R}) &= \mathbf{M}[\mathbf{D}(\xi \mid \mathfrak{R})], \\ \widetilde{D}(\xi \mid \mathfrak{R}) &= \mathbf{D}[\mathbf{M}(\xi \mid \mathfrak{R})]. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Тогда

$$\mathbf{D}\xi = \overline{D}(\xi \mid \mathfrak{R}) + \widetilde{D}(\xi \mid \mathfrak{R}). \tag{4.34}$$

В самом деле, в соответствии с (4.32) и (4.33)

$$\begin{aligned} \overline{D}(\xi \mid \mathfrak{R}) + \widetilde{D}(\xi \mid \mathfrak{R}) = \mathbf{M}[\mathbf{M}(\xi^2 \mid \mathfrak{R})] - \mathbf{M}[\mathbf{M}(\xi \mid \mathfrak{R})]^2 + \mathbf{M}[\mathbf{M}(\xi \mid \mathfrak{R})]^2 - \\ - \{\mathbf{M}[\mathbf{M}(\xi \mid \mathfrak{R})]\}^2 = \mathbf{M}\xi^2 - (\mathbf{M}\xi)^2 = \mathbf{D}\xi. \end{aligned}$$

4.8. Рассмотрим совокупность случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, связанных в цепь Маркова (так же как и при обсуждении дискретных цепей, верхний индекс серии n остается постоянным и в дальнейшем

будет опускаться). Положим $S_k = X_1 + \ldots + X_k$. Мы считаем в дальнейшем $\mathbf{M}X_i = 0$. Пусть $\widetilde{\mathfrak{A}}$ — σ-алгебра состояний системы в k-й момент времени, определенная в разделе 1.3. Обозначим

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \mathbf{M}(S_k \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_k), \\ \delta_k &= S_k - \gamma_k. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Положим, наконец,

$$\begin{aligned} \bar{D}_k &= \bar{D}(S_k \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_k) = \mathbf{D}\delta_k, \\ \tilde{D}_k &= \tilde{D}(S_k \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_k) = \mathbf{D}\gamma_k. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Тогда в соответствии с (4.34) $\bar{D}_k + \tilde{D}_k = \mathbf{D}S_k$.

Лемма 3′. *При любых целых k и l имеет место соотношение:*

$$\bar{D}_l = \bar{D}_k + \bar{D}(\gamma_k + X_{k+1} + \ldots + X_l \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_l). \tag{4.37}$$

Доказательство. Как и в дискретном случае,

$$S_l = \gamma_k + \delta_k + X_{k+1} + \ldots + X_l. \tag{4.38}$$

Мы хотим теперь доказать, что

$$\bar{D}_l = \bar{D}(\delta_k \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_l) + \bar{D}(\gamma_k + X_{k+1} + \ldots + X_l \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_l). \tag{4.39}$$

Обозначим при $1 \leqslant s < t \leqslant n$ *

$$\widetilde{\mathfrak{A}}_{s,\,t} = \widetilde{\mathfrak{A}}_s \times \ldots \times \widetilde{\mathfrak{A}}_t$$

Применяя (4.31), видим, что

$$\begin{aligned} \bar{D}(S_l \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_l) = \mathbf{M}[\delta_k - \mathbf{M}(\delta_k \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_l) + \gamma_k + X_{k+1} + \ldots \\ \ldots + X_l - \mathbf{M}(\gamma_k + X_{k+1} + \ldots + X_l \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_l)]^2 = \mathbf{M}[\delta_k - \mathbf{M}(\delta_k \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_l)]^2 + \\ + \mathbf{M}[\gamma_k + X_{k+1} + \ldots + X_l - \mathbf{M}(\gamma_k + X_{k+1} + \ldots + X_l \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_l)]^2 + \\ + 2\mathbf{M}\{[\delta_k - \mathbf{M}(\delta_k \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_l)][(\gamma_k + X_{k+1} + \ldots + X_l) - \\ - \mathbf{M}(\gamma_k + X_{k+1} + \ldots + X_l \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_l)]\}. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Поэтому для того, чтобы получить (4.39), достаточно показать, что последнее слагаемое правой части (4.40) равно нулю. Покажем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\{[\delta_k - \mathbf{M}(\delta_k \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_k)][\gamma_k + X_{k+1} + \ldots \\ \ldots + X_l - \mathbf{M}(\gamma_k + X_{k+1} + \ldots + X_l \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_l)] \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_{k,l}\} = 0. \end{aligned} \tag{4.41}$$

---

* Здесь и в дальнейшем мы будем считать, что если σ-алгебры $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$, то $\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$—это σ-алгебра множеств, порожденная системой множеств $\mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}$.

Заметим, что сумма $\gamma_k + X_{k+1} + \ldots + X_l$ измерима относительно σ-алгебры $\widetilde{\mathfrak{A}}_{kl}$. Значит, измеримо относительно $\widetilde{\mathfrak{A}}_{kl}$ и математическое ожидание этой суммы. Поэтому второй сомножитель в (4.41) можно вынести из-под знака условного математического ожидания, и для того, чтобы получить (4.41), достаточно показать, что

$$\mathbf{M}\{\delta_k - \mathbf{M}(\delta_k \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_l) \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_{kl}\} = 0. \tag{4.42}$$

Заметим далее, что случайная величина δ_k измерима относительно σ-алгебры $\widetilde{\mathfrak{A}}_{1k}$. Так как марковский процесс всегда обратим во времени (точное утверждение см. [12], стр. 83, соотношение (6.8)), то, используя свойства Маркова (см. [12], стр. 81, соотношение (6.3)), выводим отсюда, что $\mathbf{M}(\delta_k \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_{kl}) = \mathbf{M}(\delta_k \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_k)$. В книге Дуба рассматривается лишь тот случай, когда состояния системы лежат на действительной прямой, а измеримыми множествами являются борелевские множества. Однако переход к общему случаю требует лишь изменений в терминологии. По определению $\mathbf{M}(\delta_k \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_k) = 0$. Поэтому

$$\mathbf{M}(\delta_k \mid \mathfrak{A}_{kl}) = 0, \tag{4.43}$$

а значит, и $\mathbf{M}(\delta_k \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_l) = 0$. Мы доказали тем самым соотношение (4.42), а, как мы уже отмечали, из этого соотношения следует искомое равенство (4.39).

Из определения условной дисперсии (4.31) и только что отмеченного факта $\mathbf{M}(\delta_k \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_k) = \mathbf{M}(\delta_k \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_l) = 0$ вытекает, что

$$\bar{D}(\delta_k \mid \bar{\mathfrak{A}}_k) = \bar{D}(\delta_k \mid \bar{\mathfrak{A}}_l) = \mathbf{M}\delta_k^2.$$

Отсюда и из (4.39) следует, очевидно, утверждение леммы.

Сделаем следующее замечание, которое мы используем в § 6. Имеет место соотношение

$$\gamma_l = \mathbf{M}(\gamma_k + X_{k+1} + \ldots + X_l \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_l). \tag{4.44}$$

Это соотношение выводится из равенства $\mathbf{M}(\delta_k \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_l) = 0$ точно так же, как его аналог (4.16) для дискретного случая был выведен из (4.15).

Лемма 4′. *Пусть выполнены условия леммы* 2, *тогда*

$$\bar{D}_k \geqslant \bar{D}_{k-1} + \tfrac{1}{4}\alpha_{k-1}\widetilde{D}_{k-1}. \tag{4.45}$$

Доказательство. Применив лемму 3′, находим, что

$$\bar{D}_k = \bar{D}_{k-1} + \bar{D}(\gamma_{k-1} + X_k \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_k). \tag{4.46}$$

Величина X_k измерима относительно $\widetilde{\mathfrak{A}}_k$. Поэтому $X_k = \mathbf{M}(X_k \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_k)$. Применяя (4.31), видим, что

$$\begin{aligned}\bar{D}(\gamma_{k-1} + X_k \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_k) &= \mathbf{M}[\gamma_{k-1} + X_k - \mathbf{M}(\gamma_{k-1} + X_k \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_k)]^2 = \\ &= \mathbf{M}[\gamma_{k-1} - \mathbf{M}(\gamma_{k-1} \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_k)]^2 = \bar{D}(\gamma_{k-1} \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_k).\end{aligned}$$

Таким образом, чтобы доказать лемму, достаточно показать, что

$$\bar{D}(\gamma_{k-1} \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_k) \geqslant \tfrac{1}{4}\alpha_{k-1}\widetilde{D}_{k-1}. \tag{4.47}$$

По определению величины γ_{k-1} дисперсия $\widetilde{D}_{k-1} = \mathbf{D}\gamma_{k-1}$, и величина γ_{k-1} измерима относительно σ-алгебры $\widetilde{\mathfrak{A}}_{k-1}$. Поэтому для того, чтобы доказать лемму 4′, достаточно доказать несколько более общее утверждение, которое мы формулируем и доказываем в следующем разделе.

4.9. Пусть задана цепь Маркова с двумя моментами времени, пространствами состояний $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i)$, $i = 1, 2$ и пусть коэффициент эргодичности переходных вероятностей P равен α. Введем σ-алгебры $\widetilde{\mathfrak{A}}_1$ и $\widetilde{\mathfrak{A}}_2$ состояний системы в 1-й и во 2-й моменты времени (см. раздел 1.3). Пусть задана случайная величина X с $\mathbf{M}X = 0$ и $\mathbf{D}X < \infty$, измеримая относительно σ-алгебры $\widetilde{\mathfrak{A}}_1$. Тогда

$$\overline{D}(X \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_2) \geqslant \frac{1}{4}\alpha \mathbf{D}X. \tag{4.48}$$

Обозначим через m медиану распределения величины X. Тогда

$$\mathbf{M}(X - m)^2 \geqslant \mathbf{D}X.$$

Поэтому имеет место одно из двух неравенств (см. примечание на стр. 371)

$$\mathbf{M}[(X - m)^+]^2 \geqslant \frac{1}{2}\mathbf{D}X \text{ или } \mathbf{M}[(X - m)^-]^2 \geqslant \frac{1}{2}\mathbf{D}X.$$

Будем считать для определенности, что

$$\mathbf{M}[(X - m)^+]^2 \geqslant \frac{1}{2}\mathbf{D}X. \tag{4.49}$$

Обозначим через $\widetilde{H}$ множество элементарных событий, для которых $X - m \leqslant 0$. Тогда $\widetilde{H} \in \widetilde{\mathfrak{A}}_1$. Из (4.49) и того факта, что X измеримо относительно $\widetilde{\mathfrak{A}}_1$, следует, что множество $\Omega \setminus \widetilde{H}$ (здесь Ω — все пространство элементарных событий) можно представить в виде суммы конечного числа непересекающихся слагаемых $R_i \in \widetilde{\mathfrak{A}}_1$; $i = 1, \ldots, r$ так, чтобы для некоторых чисел $t_i \geqslant m$

$$\sum_{i=1}^{r} P\{\widetilde{R}_i\}(t_i - m)^2 \geqslant \frac{1}{4}\mathbf{D}X, \tag{4.50}$$

и при $\omega \in \widetilde{R}_i$ величина $X(\omega) \geqslant t_i$.

Если множество $A \in \mathfrak{A}_1$ и $P\{\widetilde{A}\} > 0$, то мы будем полагать при $\widetilde{V} \in \widetilde{\mathfrak{A}}_1$

$$p_A(V) = \frac{P\{\widetilde{A} \cap \widetilde{V}\}}{P\{\widetilde{V}\}}, \tag{4.51}$$

где $A \in \mathfrak{A}_1$ соответствует множеству $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathfrak{A}}_1$ (см. раздел 1.3; аналогичные обозначения приняты здесь и для других пар соответствующих множеств). Тогда $p_A(V)$ является распределением вероятностей на $\mathfrak{A}_1$. Обозначим через $q_A(\cdot)$ распределение вероятностей Pp_A, где P — оператор переходных вероятностей (см. раздел 1.4), заданный на $\mathfrak{A}_2$. Тогда распределение q_A совпадает с распределением вероятностей для состояния системы во 2-й момент времени при условии, что в 1-й момент времени система находилась в множестве состояний A. Из соотношения (1.5″), доказанного в разделе 3.1, вытекает, что для любых $A \in \mathfrak{A}_1$, $B \in \mathfrak{A}_1$

$$\|q_A - q_B\| \leqslant 1 - \alpha. \tag{4.52}$$

Наконец, из свойства нормы (1.15), доказанного в разделе 3.2, вытекает, что для любой пары множеств $A \in \mathfrak{A}_1$, $B \in \mathfrak{A}_1$ таких, что $P\{\widetilde{A}\} > 0$, $P\{\widetilde{B}\} > 0$ можно построить меру $\mu_{AB}(\cdot)$ на $\mathfrak{A}_2$ такую, что $\mu_{AB}(\Omega_2) = \alpha$ и для любого множества $F \in \mathfrak{A}_2$

$$\begin{aligned} q_A(F) &\geqslant \mu_{AB}(F), \\ q_B(F) &\geqslant \mu_{AB}(F). \end{aligned} \tag{4.53}$$

Если положить

$$\begin{aligned} \mu_i(F) &= P\{\widetilde{R}_i\}\,\mu_{k_i H}(F), \\ \bar{\mu}(F) &= \sum_{i=1}^{r} \mu_i(F), \end{aligned} \tag{4.54}$$

то

$$\mu_i(F) \leqslant P\{\widetilde{R}_i \cap \widetilde{F}\};\ i = 1, 2, \ldots, r, \tag{4.55}$$

и так как $P\{\widetilde{H}\} \geqslant \frac{1}{2}$, то

$$\bar{\mu}(F) \leqslant P\{\widetilde{H} \cap \widetilde{F}\}. \tag{4.56}$$

Кроме того,

$$\mu_i(\Omega) = \alpha P\{\widetilde{R}_i\}. \tag{4.57}$$

Из соотношения (4.31) и одной принадлежащей Колмогорову теоремы об условных математических ожиданиях (см. [12], гл. 1, теорема 3.4), следует, что

$$\overline{D}(X \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_2) = \sup_{\mathfrak{C}} D(X \mid \mathfrak{C}), \tag{4.58}$$

где $\mathfrak{C}$ — всевозможные конечные подалгебры σ-алгебры $\widetilde{\mathfrak{A}}_2$. Поэтому для того, чтобы вывести соотношение (4.48), достаточно показать, что для любой σ-алгебры $\mathfrak{C}$

$$\overline{D}(X \mid \mathfrak{C}) \geqslant \tfrac{1}{4}\alpha \mathbf{D}\, X. \tag{4.59}$$

Фиксируем алгебру $\mathfrak{C}$ и обозначим через $C_1, \ldots, C_s$ порождающую ее конечную систему непересекающихся множеств. Дальнейшие рассуждения, нужные для вывода (4.48), совпадают с рассуждениями, при помощи которых было выведено соотношение (4.19). При этом состояниям E_i соответствуют в новых обозначениях множества C_i, величинам $p_j a_{ji}$ соответствуют величины $\mu_i(C_j)$, равенству (4.24) соответствует равенство (4.55), равенству (4.22) — равенство (4.56) и, наконец, равенству (4.20) — равенство (4.50).

Итак, неравенство (4.48) доказано, а вместе с тем доказана и лемма 4. 4.10. Оставшаяся часть доказательства леммы 2 совпадает с точностью до обозначений с рассуждениями раздела 4.5. Стоит лишь привести снова «словарь обозначений»: равенству (4.11) соответствует равенство (4.43), равенству (4.5) — равенство (4.34).

§ 5. Сведение к сумме независимых слагаемых

5.1. В этом параграфе мы покажем, что изучение нормированной суммы $S^{(n)}$ можно свести при больших n к изучению суммы бесконечно малых независимых случайных величин. Тем самым будет доказана, в частности, теорема 2. Мы будем опираться в этом разделе на оценку дисперсии снизу, которую дает нам лемма 2 (§ 4) и на свойства коэффициента эргодичности, полученные в разделах 3.4 и 3.7 (для счетной цепи в разделах 3.5 и 3.6).

Во всем этом разделе будет предполагаться, что выполнены условия теоремы 2.

5.2. Во всех дальнейших доказательствах мы будем предполагать, что $\mathbf{M}X_i^{(n)} = 0$ при всех i и n. Тогда и $\mathbf{M}S^{(n)} = 0$ при всех n. Очевидно, что этим не уменьшается общность доказательства сформулированных в § 1 теорем. Положим для краткости $\mathbf{D}S^{(n)} = (\sigma^{(n)})^2$, $(\sigma^{(n)} \geqslant 0)$.

5.3. Пусть $1 \leqslant k < l \leqslant n$. Тогда, как следует из результатов раздела 3.4 (для счетной цепи — раздел 3.5),

$$1 - \alpha_{kl}^{(n)} \leqslant \prod_{i=k}^{l-1} (1 - \alpha_i^{(n)}). \tag{5.1}$$

Из условия (1.8) теоремы 2 следует, что существует функция $f(n) \to \infty$ при $n \to \infty$ такая, что при всех i

$$\alpha_i^{(n)} \geqslant \frac{f(n)}{n^{1/3}}. \tag{5.2}$$

Поэтому, если $l - k \geqslant n^{1/3}$, то

$$1 - \alpha_{kl}^{(n)} \leqslant \left[1 - \frac{f(n)}{n^{1/3}}\right]^{n^{1/3}} \tag{5.3}$$

и при $n \to \infty$ равномерно по всем парам $l - k \geqslant n^{1/3}$

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_{kl}^{(n)} = 1. \tag{5.4}$$

С другой стороны, из общего неравенства, верного для любого набора случайных величин $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$

$$\mathbf{D}(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_m) \leqslant m(\mathbf{D}Y_1 + \ldots + \mathbf{D}Y_m)$$

и условия (1.23) теоремы 2 следует, что дисперсия

$$\mathbf{D}S_{kl}^{(n)} \leqslant (l-k) \sum_{i=k+1}^{l} \mathbf{D}X_i^{(n)} \leqslant C(l-k)^2. \tag{5.5}$$

Определение величины $S_{kl}^{(n)}$ см. (1.43)). Из леммы 2 следует, что $\sigma^{(n)} \geqslant hn^{1/3}[f(n)]^{1/2}$, где h — некоторая постоянная, и, следовательно

$$(\sigma^{(n)})^{-2} \mathbf{D}S_{kl}^{(n)} \to 0 \tag{5.6}$$

при $n \to \infty$ равномерно по всем парам k, l таким, что $l - k \geqslant n^{1/3}$.

Из (5.4) и (5.6) следует, что можно подобрать последовательность целых чисел $g^{(n)} \to \infty$ при $n \to \infty$ и набор чисел $k^{(n)}$, $l_i^{(n)}$; $i = 1, 2, \ldots$

$\ldots, g^{(n)}$; $n = 1, 2, \ldots$ так, чтобы $1 \leqslant k_1^{(n)} < l_1^{(n)} < k_2^{(n)} < l_2^{(n)} < \ldots < k_{g^{(n)}}^{(n)} < l_{g^{(n)}}^{(n)} \leqslant n$ и были выполнены соотношения

$$(\sigma^{(n)})^{-2} \mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{g^{(n)}} S_{k_i^{(n)}, l_i^{(n)}}\right) \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{5.7}$$

и

$$\sum_{i=1}^{g^{(n)}} (1 - \alpha_{k_i^{(n)}, l_i^{(n)}}) \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{5.8}$$

В самом деле, это будет так, если $l_i^{(n)} - k_i^{(n)} \geqslant n^{1/3}$ и $g^{(n)}$ стремится к бесконечности достаточно медленно.

Соотношение (5.7) означает, что предельное распределение для нормированной суммы $(\sigma^{(n)})^{-1} S^{(n)}$ совпадает с предельным распределением сумм

$$(\sigma^{(n)})^{-1} \left(\sum_{i=0}^{g^{(n)}} S_{l_i^{(n)}, k_{i+1}^{(n)}}\right) \tag{5.9}$$

(мы положили для краткости $l_i^{(n)} = 1$, $k_{g^{(n)}+1}^{(n)} = n$). В разделе 5.6 мы разъясним, что соотношение (5.8) позволяет считать слагаемые этой суммы асимптотически независимыми случайными величинами. В соответствии с известными результатами теории сумм независимых величин (см. [8] § 21) для того, чтобы иметь право утверждать, что предельное распределение сумм (5.9) является безгранично делимым (и тем самым доказать теорему 2), необходимо еще, чтобы слагаемые суммы (5.9) были бесконечно малыми, т. е. чтобы равномерно по i

$$(\sigma^{(n)})^{-2} \mathbf{D} S_{l_i^{(n)}, k_{i+1}^{(n)}} \to 0 \tag{5.10}$$

при $n \to \infty$. В разделе 5.9 мы строим разбиения $k_i^{(n)}$, $l_i^{(n)}$, удовлетворяющие также дополнительному требованию (5.10).

5.4. Начнем со следующего замечания. Пусть две случайные величины Z_1 и Z_2 связаны в цепь Маркова с двумя моментами времени, заданную переходной вероятностной функцией (матрицей вероятностей перехода) с коэффициентом эргодичности α. Пусть $\widetilde{Z}_1$ и $\widetilde{Z}_2$ — независимые случайные величины, имеющие, соответственно, те же распределения, что и величины Z_1 и Z_2. Тогда, как мы сейчас увидим, для любого x

$$|\mathbf{P}\{Z_1 + Z_2 < x\} - \mathbf{P}\{\widetilde{Z}_1 + \widetilde{Z}_2 < x\}| \leqslant 2(1 - \alpha). \tag{5.11}$$

Докажем это соотношение сначала для случая счетной цепи. Пусть $p_i^{(1)}$ и $p_i^{(2)}$ — безусловные вероятности состояний системы, соответственно, в 1-й и 2-й моменты времени, а q_{ij} — переходные вероятности цепи. Так как $p_j^{(2)} = \sum_i p_i^{(1)} q_{ij}$, то из (3.22) [или для читателя, знакомого с разделом 1.4 из (1.5″)] следует, что при любом i

$$\sum_{j=1}^{\infty} |p_j^{(2)} - q_{ij}| \leqslant 2(1 - \alpha). \tag{5.12}$$

Но

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{Z_1+Z_2<x\}&=\sum_{(i,j)\in A}p_i^{(1)}q_{ij},\\ \mathbf{P}\{\widetilde{Z}_1+\widetilde{Z}_2<x\}&=\sum_{(i,j)\in A}p_i^{(1)}p_j^{(2)},\end{aligned}\tag{5.13}$$

где A — некоторое множество пар индексов. Учитывая (5.12), видим, что отсюда следует искомое соотношение (5.11).

5.5. Перейдем к общему случаю. Очевидно, что для того, чтобы получить (5.11), достаточно показать, что при любом m

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big|\mathbf{P}\Big\{\frac{k-1}{m}\leqslant Z_1<\frac{k}{m},\ Z_2<x-\frac{k}{m}\Big\}-\\ -\mathbf{P}\Big\{\frac{k-1}{m}\leqslant\widetilde{Z}_1<\frac{k}{m}\Big\}\mathbf{P}\Big\{\widetilde{Z}_2<x-\frac{k}{m}\Big\}\Big|\leqslant 2(1-\alpha).\end{aligned}\tag{5.14}$$

Фиксируем m и положим $p_i^{(1)}=\mathbf{P}\Big\{\frac{i-1}{m}\leqslant Z_1<\frac{i}{m}\Big\}$, $p_i^{(2)}=\mathbf{P}\Big\{Z_2<x-\frac{i}{m}\Big\}$ и $q_{ij}=\mathbf{P}\Big\{Z_2<x-\frac{i}{m}\Big|\frac{i-1}{m}\leqslant Z_1<\frac{i}{m}\Big\}$. Матрица $Q=\{q_{ij}\}$ является стохастической и $\alpha(Q)\geqslant\alpha$. В самом деле, если обозначить через $\mu_i(B)$ условное распределение вероятностей для положения системы во второй момент времени при условии, что $\Big\{\frac{i-1}{m}\leqslant Z_1<\frac{i}{m}\Big\}$, то $\|\mu_i(B)-\mu_j(B)\|\leqslant$ $\leqslant 1-\alpha$. Сравнивая определение нормы (1.15) и определение коэффициента эргодичности (1.19), получаем нужное соотношение $\alpha(Q)\geqslant\alpha$. Дальнейшие рассуждения, нужные для вывода (5.14), вполне аналогичны рассуждениям, использованным в предыдущем абзаце для вывода соотношения (5.11).

5.6. Вернемся теперь к сумме (5.9). Фиксируем n и положим для краткости $(\sigma^{(n)})^{-1}S^{(n)}_{l_i^{(n)},\,k_{i+1}^{(n)}}=Z_i$; $i=0,1,\ldots,g$. Пусть $\widetilde{Z}_i$ — независимые величины, имеющие те же распределения, что и величины Z_i. Мы хотим показать, что при любом x

$$\begin{aligned}|\mathbf{P}\{Z_0+Z_1+\ldots+Z_g<x\}-\mathbf{P}\{\widetilde{Z}_0+\widetilde{Z}_1+\ldots+\widetilde{Z}_g<x\}|\leqslant\\ \leqslant\sum_{i=1}^{g}(1-\alpha^{(n)}_{k_i^{(n)},\,l_i^{(n)}}).\end{aligned}\tag{5.15}$$

Из результатов раздела 3.7 (для дискретного случая 3.6) следует, что величины Z_i; $i=0,1,\ldots,g$ можно считать связанными в цепь Маркова с $g+1$ моментами времени, для которой i-я переходная функция имеет коэффициент эргодичности $\alpha^{(n)}_{k_i^{(n)},\,l_i^{(n)}}$. Мы можем считать, что величины $\widetilde{Z}_i$ не зависят от величин Z_i. Тогда при любом m последовательность величин $Z_0, Z_1, \ldots, Z_m, \widetilde{Z}_{m+1}, \widetilde{Z}_{m+2}, \ldots, \widetilde{Z}_g$ также связана в цепь Маркова. Применяя снова результаты раздела 3.8 (соответственно 3.6), видим, что при любом m две величины $Z_0+Z_1+\ldots+Z_{m-1}$ и $\widetilde{Z}_m+\widetilde{Z}_{m+1}+\ldots$ $\ldots+\widetilde{Z}_g$ связаны в цепь Маркова с двумя моментами времени и коэффициентом эргодичности $\alpha^{(n)}_{k_m^{(n)},\,l_m^{(n)}}$. Учитывая, что распределение суммы Z_m+

$+\widetilde{Z}_{m+1}+\ldots+\widetilde{Z}_g$ совпадает с распределением суммы $\widetilde{Z}_m+\widetilde{Z}_{m+1}+\ldots+\widetilde{Z}_g$, и применяя последовательно g раз соотношение (5.11), получаем нужное нам соотношение (5.15).

5.7. Пусть снова две случайные величины Z_1 и Z_2 связаны в цепь Маркова с двумя моментами времени, заданную переходной вероятностной функцией (стохастической матрицей) с коэффициентом эргодичности α. Мы получим в этом разделе следующее неравенство:

$$|\mathbf{D}(Z_1+Z_2)-(\mathbf{D}Z_1+\mathbf{D}Z_2)|\leqslant$$
$$\leqslant 2\sqrt{1-\alpha}\left[\mathbf{D}Z_1+\sqrt{2\mathbf{D}Z_1[\mathbf{D}(Z_1+Z_2)+\mathbf{D}Z_1+\mathbf{D}Z_2]}\right]. \tag{5.16}$$

Это неравенство показывает, что при малом $1-\alpha$, когда величины Z_1 и Z_2 «почти независимы», их дисперсии «почти складываются». Мы будем, как обычно считать, что $\mathbf{M}Z_1=\mathbf{M}Z_2=0$. Обозначим при целом положительном m через $A_i^{(m)}$ событие, состоящее в том, что $\frac{i}{m}\leqslant Z_1<\frac{i+1}{m}$ и аналогично введем события $B_i^{(m)}$, связанные с Z_2. Очевидно, что, взяв достаточно большое m, величины $\mathbf{D}Z_1$, $\mathbf{D}Z_2$, $\mathbf{D}(Z_1+Z_2)$ и $\mathbf{D}Z_1+\mathbf{D}Z_2$ можно сколь угодно близко приблизить соответственно суммами

$$\Sigma_1^{(m)}=\frac{1}{m^2}\sum_{i=-\infty}^{\infty}i^2P\{A_i^m\},\ \Sigma_2^{(m)}=\frac{1}{m^2}\sum_{i=-\infty}^{\infty}i^2P\{B_i^m\}, \tag{5.17}$$
$$\Sigma_3^{(m)}=\frac{1}{m^2}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}(i+j)^2P\{A_i^{(m)}\cap B_j^{(m)}\},$$
$$\Sigma_4^{(m)}=\frac{1}{m^2}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}(i+j)^2P\{A_i^{(m)}\}P\{B_j^{(m)}\}.$$

Поэтому для того, чтобы вывести неравенство (5.16) достаточно показать, что при любом m

$$|\Sigma_3^{(m)}-\Sigma_4^{(m)}|\leqslant 2\sqrt{1-\alpha}\left[\Sigma_1^{(m)}+\sqrt{\Sigma_1^{(m)}(\Sigma_3^{(m)}+\Sigma_1^{(m)})}\right]. \tag{5.18}$$

Для дальнейшего мы фиксируем индекс m и будем его опускать. Положим также для краткости $p_i=P\{A_i\}$, $q_{ij}=P\{B_j|A_i\}$, $r_j=P\{B_j\}$. Тогда матрица $Q=\{q_{ij}\}$ является стохастической и так же, как и в разделе 5.5, легко показать, что $\alpha(Q)\geqslant\alpha$ (для дискретного случая этот факт следует очевидным образом из определения коэффициента эргодичности). Из формы определения эргодичности, даваемой соотношением (1.5″) (или из соотношения (3.22)) следует, что при всех i

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}|q_{ij}-r_j|\leqslant 2(1-\alpha). \tag{5.19}$$

Положим

$$\varepsilon_{ij}=p_iq_{ij}-p_ir_j. \tag{5.20}$$

Тогда при всех i и j

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\varepsilon_{ij}|\leqslant 2p_i(1-\alpha),\quad \sum_{i=-\infty}^{\infty}\varepsilon_{ij}=0. \tag{5.21}$$

Наконец, используя (5.21) и неравенство Коши — Буняковского, имеем

$$|\Sigma_3 - \Sigma_4| = \frac{1}{m^2}\left|\sum_{i,j}\varepsilon_{ij}(i+j)^2\right| = \left|\frac{1}{m^2}\sum_{i,j}\varepsilon_{ij}(i^2+2ij)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{m^2}\sum_{i,j}|\varepsilon_{ij}|\,i^2 + 2\sum_{i,j}|\varepsilon_{ij}|\,\frac{|i(i+j)|^2}{m^2} \leqslant 2(1-\alpha)\Sigma_1 +$$

$$+ 2\sqrt{\left(\sum_{i,j}|\varepsilon_{ij}|\,\frac{i^2}{m^2}\right)\left[\sum_{i,j}|\varepsilon_{ij}|\,\frac{(i+j)^2}{m^2}\right]}. \tag{5.22}$$

Заметим, что $|\varepsilon_{ij}| \leqslant p_i q_{ij} + r_j p_i$ и поэтому

$$\sum_{i,j}|\varepsilon_{ij}|\,\frac{(i+j)^2}{m^2} \leqslant \frac{1}{m^2}\sum_{i,j}p_i q_{ij}(i+j)^2 + \frac{1}{m^2}\sum_{i,j}p_i r_j (i+j)^2 \leqslant \Sigma_3 + \Sigma_4. \tag{5.23}$$

Так как $1-\alpha \leqslant \sqrt{1-\alpha}$, то из (5.22) и (5.23) вытекает искомое неравенство (5.18).

Мы будем использовать в дальнейшем два следующих следствия из только что выведенного неравенства (5.16).

Следствие 1. *Существует функция* $g(\alpha)$ *такая, что* $\overline{\lim_{\alpha\to 1}}\frac{g(\alpha)}{\sqrt{1-\alpha}} < \infty$, *при* $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$ *функция* $g(\alpha)$ *ограничена и*

$$|\mathbf{D}(Z_1+Z_2) - (\mathbf{D}Z_1 + \mathbf{D}Z_2)| \leqslant g(\alpha)\,\mathbf{D}(Z_1+Z_2). \tag{5.24}$$

Следствие 2. *Для той же, что и в предыдущем следствии, функции* $g(\alpha)$

$$|D(Z_1+Z_2) - (\mathbf{D}Z_1 + \mathbf{D}Z_2)| \leqslant g(\alpha)(\mathbf{D}Z_1 + \mathbf{D}Z_2). \tag{5.25}$$

В самом деле, пусть $1-\alpha \leqslant \frac{1}{2}$ и

$$x = \frac{\mathbf{D}(Z_1+Z_2)}{\mathbf{D}Z_1 + \mathbf{D}Z_2}.$$

Тогда из неравенства (5.16) получаем делением на $\mathbf{D}Z_1 + \mathbf{D}Z_2$, что

$$|x-1| \leqslant \sqrt{2}\left[1 + \sqrt{2(1+x)}\right]. \tag{5.26}$$

При $x \to \infty$ левая часть неравенства растет быстрее, чем правая, поэтому существует константа $K < \infty$ такая, что все решения неравенства (5.26) не превосходят K. Отсюда

$$\mathbf{D}(Z_1+Z_2) \leqslant K(\mathbf{D}Z_1 + \mathbf{D}Z_2). \tag{5.27}$$

Подставляя (5.27) в левую часть неравенства (5.16), получаем искомое соотношение (5.25). Из (5.25) следует, что при $g(\alpha) \leqslant \frac{1}{2}$

$$\mathbf{D}(Z_1+Z_2) \geqslant \frac{1}{2}(\mathbf{D}Z_1 + \mathbf{D}Z_2).$$

Поэтому из (5.25) вытекает неравенство (5.24).

5.8. Докажем теперь одно общее утверждение, которое будет неоднократно использоваться в дальнейшем. Пусть задана совокупность

m случайных величин $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$ с конечными дисперсиями, связанных в цепь Маркова с m моментами времени, причем все коэффициенты эргодичности вероятностей перехода за один шаг не меньше числа $1-\eta$, где $\eta \leqslant \frac{1}{2}$. Тогда имеет место следующая оценка: при некоторой постоянной $K < \infty$

$$|\mathbf{D}(Z_1+Z_2+\ldots+Z_m)-(\mathbf{D}Z_1+\mathbf{D}Z_2+\ldots+\mathbf{D}Z_m)| \leqslant K\sqrt{\eta}\sum_{k=1}^{m}\mathbf{D}Z_k. \quad (5.28)$$

Без ограничения общности можно предположить, что $MZ_i = 0$. Вспомним теперь, что при любых k и l две величины Z_k и Z_{k+l} также связаны в цепь Маркова, причем соответствующий коэффициент эргодичности не меньше числа $1-\eta^l$ (см. раздел 3.4, для дискретного случая 3.5). Из неравенства (5.25) следует, что

$$|M(Z_k Z_{k+l})| \leqslant \widetilde{K}\sqrt{\eta^l}(\mathbf{D}Z_k+\mathbf{D}Z_{k+l}), \quad (5.29)$$

где $\widetilde{K}$ — некоторая постоянная. Далее, очевидно, что

$$|\mathbf{D}(Z_1+Z_2+\ldots+Z_m)-(\mathbf{D}Z_1+\ldots+\mathbf{D}Z_m)| \leqslant \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{m}|\mathbf{M}(Z_iZ_j)|. \quad (5.30)$$

Из (5.29) и (5.30) следует, очевидно, что левая часть (5.28) не превосходит величины

$$\widetilde{K}(\eta^{1/3}+\eta+\eta^{2/3}+\ldots)\sum_{k=1}^{m}\mathbf{D}Z_k,$$

откуда и следует нужное неравенство (5.28).

5.9. Вернемся теперь к рассмотрениям, начатым в разделе 5.3. Мы хотим показать, что в условиях теоремы 2 можно подобрать числа $g^{(n)}\to\infty$ при $n\to\infty$ и разбиения $1 \leqslant k_1^{(n)} < l_1^{(n)} < k_2^{(n)} < l_2^{(n)} < \ldots < k_{g^{(n)}}^{(n)} < l_{g^{(n)}}^{(n)} \leqslant n$ так, чтобы выполнялись соотношения (5.7) и (5.8) и (5.10). Как мы уже отмечали в разделе 5.3, для выполнения соотношений (5.7) и (5.8) достаточно, чтобы $l_i^{(n)} - k_i^{(n)} \geqslant n^{1/3}$, и чтобы $g^{(n)}$ стремилось к бесконечности достаточно медленно.

Сделаем, во-первых, следующее замечание. При всех достаточно больших n для любой пары индексов t и u, $1 \leqslant t < u \leqslant n$

$$\mathbf{D}S_{t,u}^{(n)} \leqslant 2(\sigma^{(n)})^2. \quad (5.31)$$

В самом деле, пусть $t' = \min(1, t-[n^{1/3}])$, $u' = \max(n, u+[n^{1/3}])$. Тогда из (5.6) следует, что при $n\to\infty$

$$(\sigma^{(n)})^{-2}\mathbf{D}(S_{1,t'}^{(n)}+S_{t,u}^{(n)}+S_{u',n}^{(n)})\to 1$$

(если $t'=1$, то слагаемое $S_{1,t'}^{(n)}$ считаем равным нулю; аналогично посту-

паем, если $u' = n$). Далее из (5.4) и (5.24) следует, что при $n \to \infty$ равномерно по t и u

$$(\sigma^{(n)})^{-2} [\mathbf{D}S^{(n)}_{1,t'} + \mathbf{D}S^{(n)}_{t,u} + \mathbf{D}S^{(n)}_{u',n}] \to 1,$$

а отсюда очевидным образом следует (5.31). Так как наши рассмотрения имеют асимптотический характер, мы можем считать в дальнейшем, что (5.31) выполнено всегда.

Заметим далее, что при $n \to \infty$ равномерно по всем парам t и u

$$(\sigma^{(n)})^{-2} |\mathbf{D}S^{(n)}_{t,u} - \mathbf{D}S^{(n)}_{t,u+1}| \to 0. \tag{5.32}$$

В самом деле, учитывая условие (1.23) теоремы 2 и (5.31), видим, что

$$(\sigma^{(n)})^{-2} |\mathbf{D}S^{(n)}_{t,u} - \mathbf{D}(S^{(n)}_{t,u} + X^{(n)}_{u+1})| \leqslant$$

$$\leqslant (\sigma^{(n)})^{-2} \left[\mathbf{D}X^{(n)}_{u+1} + 2\sqrt{\mathbf{D}X^{(n)}_{u+1}\,\mathbf{D}S^{(n)}_{t,u}}\right] \leqslant \frac{C + 2\sqrt{2C\,(\sigma^{(n)})^2}}{(\sigma^{(n)})^2}, \tag{5.33}$$

отсюда и следует нужная оценка, если учесть, что $\sigma^{(n)} \to \infty$.

Опишем, наконец, как нужно выбирать разбиение $k^{(n)}_i$, $l^{(n)}_i$. Возьмем последовательность целых чисел r_n, удовлетворяющих следующим четырем условиям: во-первых, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \infty$; во-вторых,

$$\lim_{n\to\infty} (r_n)^2 \max_{l-k \geqslant n^{1/3}} \sqrt{1 - \alpha^{(n)}_{kl}} = 0, \tag{5.34}$$

где максимум берется по всем парам k и l таким, что $0 \leqslant k < l \leqslant k + n^{1/3}$, в-третьих,

$$\lim_{n\to\infty} (r_n)^2 (\sigma^{(n)})^{-1} \max_{l-k \leqslant n^{1/3}} (\mathbf{D}S^{(n)}_{k,l})^{1/2} = 0, \tag{5.35}$$

где максимум берется по всем парам k и l таким, что $0 \leqslant k < l \leqslant k + n^{1/3}$; наконец, в-четвертых

$$\lim_{n\to\infty} (r_n)^2 (\sigma^{(n)})^{-2} \max_{t<u} |\mathbf{D}S^{(n)}_{t,u+1} - \mathbf{D}S^{(n)}_{t,u}| = 0, \tag{5.36}$$

где максимум берется по всем парам t и u таким, что $0 \leqslant t < u \leqslant n$. Возможность такого выбора следует, соответственно, из (5.4), (5.6) и (5.32). Точки $k^{(n)}_i$ и $l^{(n)}_i$ будем строить последовательным образом. Нам будет удобно считать, что $l^{(n)}_0 = 1$. Если значение $l^{(n)}_{i-1}$ уже определено, то мы положим $k^{(n)}_i$ равным наименьшему целому числу u, для которого $(\sigma^{(n)})^{-2} \mathbf{D}S^{(n)}_{l^{(n)}_{i-1},\,u} \geqslant 1/r_n$. Если уже определено значение $k^{(n)}_i$, мы положим $l^{(n)}_i$ равным наименьшему u, для которого $u \geqslant k^{(n)}_i + n^{1/3}$. Построение заканчивается, когда первое из получаемых чисел $l^{(n)}_i$ превзойдет n. При этом, если последним было построено одно из чисел k, мы считаем $l^{(n)}_{g^{(n)}} = n$.

Покажем, что приведенное построение обладает нужными нам свойствами. Из самого построения и соотношения (5.32) следует, что при всех i и достаточно большом n

$$(\sigma^{(n)})^{-2}\,\mathbf{D}S^{(n)}_{l_i^{(n)},\,k_{i+1}^{(n)}} \leqslant \frac{2}{r_n} \tag{5.37}$$

так что условие (5.10) выполняется очевидным образом. Для того, чтобы проверить условия (5.7) и (5.8), надо оценить сверху число $g^{(n)}$ элементов разбиения. Для этого покажем, что при достаточно большом n и $i \leqslant r_n$

$$(\sigma^{(n)})^{-2}\,\mathbf{D}S^{(n)}_{l_i^{(n)},\,n} = 1 - \frac{i}{r_n} + \psi_{ni}, \tag{5.38}$$

где $(r_n)^{-1}\psi_{ni} \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно по i. Действительно, из (5.31) вытекает, что

$$(\sigma^{(n)})^{-2}\,|\,\mathbf{D}S^{(n)}_{l_i^{(n)},\,n} - \mathbf{D}\,(S^{(n)}_{l_i^{(n)},\,k_{i+1}^{(n)}} + S^{(n)}_{l_{i+1}^{(n)},\,n})\,| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\mathbf{D}S^{(n)}_{k_{i+1}^{(n)},\,l_{i+1}^{(n)}}}{(\sigma^{(n)})^2} + \frac{4\sqrt{\mathbf{D}S^{(n)}_{k_{i+1}^{(n)},\,l_{i+1}^{(n)}}}}{\sigma^{(n)}}. \tag{5.39}$$

Далее, из (5.25) и (5.31) следует, что

$$(\sigma^{(n)})^{-2}\,|\,\mathbf{D}\,(S^{(n)}_{l_i^{(n)},\,k_{i+1}^{(n)}} + S^{(n)}_{l_i^{(n)},\,n}) - (\mathbf{D}S^{(n)}_{l_i^{(n)},\,k_{i+1}^{(n)}} + \mathbf{D}S^{(n)}_{l_{i+1}^{(n)},\,n})\,| \leqslant$$

$$\leqslant 4g\,(\alpha^{(n)}_{k_{i+1}^{(n)},\,l_{i+1}^{(n)}}). \tag{5.40}$$

Таким образом асимптотически

$$(\sigma^{(n)})^{-2}\,|\,\mathbf{D}S^{(n)}_{l_i^{(n)},\,n} - (\mathbf{D}S^{(n)}_{l_i^{(n)},\,k_{i+1}^{(n)}} + \mathbf{D}S^{(n)}_{l_{i+1}^{(n)},\,n})\,| = o\left(\frac{1}{r_n}\right).$$

Учтем, наконец, что по построению

$$\left|\,\mathbf{D}\,S^{(n)}_{l_i^{(n)},\,k_{i+1}^{(n)}} - \frac{1}{r_n}\right| \leqslant (\sigma^{(n)})^{-2} \max_{t<u}\,|\,\mathbf{D}\,S^{(n)}_{t,\,u} - \mathbf{D}\,S^{(n)}_{t,\,u+1}\,|. \tag{5.41}$$

Таким образом, утверждение $(\sigma^{(n)})^{-2}\,\mathbf{D}\,S^{(n)}_{l_i^{(n)},\,n} = 1 - \frac{i}{r_n} + O\left(\frac{1}{r_n}\right)$ может быть доказано индукцией по i. Точное утверждение (5.38) получаем, суммируя оценки (5.39), (5.40), (5.41) и учитывая условия, наложенные на r_n. Соотношение (5.38) показывает, что при достаточно большом n число слагаемых $g^{(n)} \leqslant r_n + 1$. Но тогда условия (5.7) и (5.8) становятся очевидными следствиями предположений (5.35) и (5.34) и утверждение доказано.

5.10. Для дальнейшего нам окажется полезным следующее замечание: для построенного в предыдущем разделе разбиения

$$\lim_{n\to\infty}(\sigma^{(n)})^{-2}\sum_{i=0}^{g^{(n)}}\mathbf{D}S^{(n)}_{l_i^{(n)},\,k_{i+1}^{(n)}} = 1. \tag{5.42}$$

Этот факт вытекает легко из условия (5.7) и оценки (5.28).

Соотношение (5.42) позволяет заменять при асимптотическом изучении сумм (5.9) нормирующий множитель $(\sigma^{(n)})^{-1}$ на нормирующий множитель, равный корню из дисперсии этой суммы.

5.11. Сведем все результаты проведенного в этом параграфе обсуждения в лемму, которую мы будем использовать для дальнейших ссылок.

Лемма 6. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда при любом n можно подобрать целые числа $1 \leqslant l_0^{(n)} \leqslant k_0^{(n)} < k_1^{(n)} < l_1^{(n)} < \ldots < k_{g^{(n)}}^{(n)} < l_{g^{(n)}}^{(n)} < k_{g^{(n)}+1}^{(n)} \leqslant n$ так, чтобы, если обозначить при фиксированном n через $\widetilde{S}_i^{(n)}$, $i = 0, 1, \ldots, g^{(n)}$ независимые случайные величины, имеющие соответственно те же распределения, что и величины $S_{l_i^{(n)}, k_{i+1}^{(n)}}$ и положить*

$$(\widetilde{\sigma}^{(n)})^2 = \sum_{i=0}^{g^{(n)}} \mathbf{D}\widetilde{S}_i^{(n)}, \quad (\widetilde{\sigma}^{(n)} \geqslant 0), \tag{5.43}$$

то для любого x

$$\lim_{n\to\infty} \left| \mathbf{P}\left\{\frac{S^{(n)}}{\sigma^{(n)}} < x\right\} - \mathbf{P}\left\{\frac{\sum_{i=0}^{g^{(n)}} \widetilde{S}_i^{(n)}}{\sigma^{(n)}} < x\right\} \right| = 0 \tag{5.44}$$

и равномерно по всем i

$$\lim_{n\to\infty} (\widetilde{\sigma}^{(n)})^{-2} \mathbf{D}\widetilde{S}_i^{(n)} = 0. \tag{5.45}$$

Известный результат о том, что сумма бесконечно малых независимых случайных величин имеет асимптотически безгранично делимое распределение (см. [8], стр. 105), показывает, что из леммы 6 вытекает сразу теорема 2.

Для того, чтобы доказать теорему 1, нужно проверить, что в условиях этой теоремы слагаемые $\widetilde{S}_i^{(n)}$ удовлетворяют условиям, достаточным для притяжения к нормальному закону. Этой проверке посвящены §§ 6 и 7.

§ 6. Доказательство теоремы об асимптотической нормальности при условии $\alpha^{(n)} n^{1/3} (\ln n)^{-1} \to \infty$

6.1. В этом параграфе будет развит наш метод доказательства асимптотической нормальности сумм слагаемых $\widetilde{S}_i^{(n)}$ (см. лемму 6) и в результате получена теорема 1 при условии $\alpha^{(n)} n^{1/3} (\ln n)^{-1} \to \infty$. Отказ от дополнительного множителя $(\ln n)^{-1}$ требует более сложных рассуждений, которые проводятся в § 7.

6.2. Приведем известную теорему об условиях асимптотической нормальности сумм независимых величин с конечной дисперсией (см. [8], стр. 110), на которую мы будем опираться в дальнейшем.

Теорема. *Пусть задана последовательность серий случайных величин* $\nu_k^{(n)}$; $k = 0, 1, \ldots, g^{(n)}$; $n = 1, 2, \ldots$, *причем все величины* $\nu_k^{(n)}$ *имеют нулевые математические ожидания и конечные дисперсии. Пусть при фиксированном* n *величины* $\nu_k^{(n)}$; $k = 0, 1, \ldots, g^{(n)}$ *независимы. Положим*

$$T^{(n)} = \nu_1^{(n)} + \nu_2^{(n)} + \ldots + \nu_{g^{(n)}}^{(n)}. \tag{6.1}$$

Пусть при всех n

$$\mathbf{D}\, T^{(n)} = 1, \tag{6.2}$$

и равномерно по i

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{D}\, \nu_i^{(n)} = 0. \tag{6.3}$$

Положим, наконец,

$$F_i^{(n)}(x) = \mathbf{P}\{\nu_i^{(n)} < x\}. \tag{6.4}$$

Тогда для того, чтобы при любом x

$$\lim_{n\to\infty} \left| \mathbf{P}\{T^{(n)} < x\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt \right| = 0 \tag{6.5}$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{g^{(n)}} \int_{|x|\geqslant\varepsilon} x^2\, dF_i^{(n)}(x) = 0. \tag{6.6}$$

Выведем из этой теоремы следующее очень полезное для нас следствие.

Лемма 7. *Пусть выполнены условия только что сформулированной теоремы, и пусть при некотором фиксированном целом* r

$$\nu_k^{(n)} = {}_1\mu_k^{(n)} + {}_2\mu_k^{(n)} + \ldots + {}_r\mu_k^{(n)}, \tag{6.7}$$

где все математические ожидания $\mathbf{M}_i\mu_k^{(n)} = 0$ *и величины* ${}_i\mu_k^{(n)}$ *являются при фиксированных* k *и* n *независимыми (но при разных* k, *вообще говоря, зависимыми!). Положим*

$${}_iG_k^{(n)}(x) = \mathbf{P}\{{}_r\mu_k^{(n)} < x\}.$$

Тогда для того, чтобы выполнялось утверждение об асимптотической нормальности (6.5), *достаточно, чтобы при* $i = 1, 2, \ldots, r$ *и любом* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{g^{(n)}} \int_{|x|\geqslant\varepsilon} x^2\, d\, {}_iG_k^{(n)}(x) = 0. \tag{6.8}$$

Доказательство леммы. Мы начнем с вывода одного неравенства, которое будем использовать также и в дальнейшем. Пусть $Y, Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ — случайные величины, имеющие, соответственно, функции распределения $F(x), F_1(x), \ldots, F_r(x)$ и

$$Y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_r.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon} x^2 dF(x) \leqslant \left(1+\frac{r}{\varepsilon^2}\right) \sum_{i=1}^{r} \int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon/r} x^2\, dF_i(x). \tag{6.9}$$

Будем опираться на известное неравенство: для любых чисел $y_1, y_2, \ldots, y_r$

$$(y_1+\ldots+y_r)^2 \leqslant r(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_r^2). \tag{6.10}$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и обозначим через A_i событие, состоящее в том, что $\{|Y_i| \geqslant \varepsilon/r\}$. Легко видеть, что имеет место следующее включение между событиями

$$\{|Y| \geqslant \varepsilon\} \subset \bigcup_{i=1}^{r} A_i.$$

Поэтому из (6.10) следует, что (здесь P — распределение вероятностей)

$$\int\limits_{|x_i|\geqslant\varepsilon} x^2 dF(x) \leqslant r \int\limits_{\bigcup A_i} (Y_1^2+Y_2^2+\ldots+Y_r^2)\, dP \leqslant$$

$$\leqslant r\left(\sum_{i=1}^{r} \int\limits_{|x_i|\geqslant\varepsilon/r} x^2\, dF_i(x) + \frac{1}{r}\int\limits_{\bigcup A_i} \varepsilon^2\, dP\right), \tag{6.11}$$

а отсюда, применяя неравенства Чебышева, получаем (6.8).

Применяя (6.9) к каждой из сумм (6.7) и суммируя по k, видим, что условия леммы влекут за собой выполнение условия (6.6) теоремы, что и требовалось доказать.

6.3. Будем применять только что доказанную лемму в случае, когда роль слагаемых $\nu_i^{(n)}$ играют величины $\widetilde{S}_i^{(n)}$ (см. раздел 5.11). Ввиду этого мы сейчас введем некоторое специальное представление каждой из величин $S_{lk}^{(n)}$ (эти величины имеют то же распределение, что и величины $\widetilde{S}_i^{(n)}$) в виде суммы двух слагаемых, которое будет использоваться нами в дальнейшем. Мы будем считать в этом разделе фиксированными числа n, k и l, обозначать в связи с этим величину $S_{kl}^{(n)}$ просто через S и опускать везде верхний индекс. Мы хотим построить представление величины S в виде суммы

$$S = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \tag{6.12}$$

так, чтобы слагаемые обладали следующим свойством:

Каждая из величин ξ_k; $k = 1, 2, 3$ может быть в свою очередь представлена в виде суммы

$$\xi_k = \eta_1^k + \eta_2^k + \cdots + \eta_{s_k}^k \tag{6.13}$$

случайных величин η_i^k; $i = 1, 2, \ldots, s_k$; s_k — некоторое целое число), причем это представление обладает следующими свойствами:

Свойство A: При любом $k = 1, 2, 3$ величины η_i^k образуют последовательность величин, связанных в цепь Маркова с s_k моментами времени,

причем коэффициенты эргодичности вероятностей перехода за один шаг не меньше, чем число

$$1-\left(1-\frac{f(n)}{2n^{1/3}}\right)^{n^{1/3}} \tag{6.14}$$

(определение $f(n)$ см. раздел 5.3).

Свойство Б: При всех i и k

$$|\gamma_i^k| \leqslant 10C[n^{1/3}+1] \text{ *} \tag{6.15}$$

(определение числа C см. в формулировке теоремы 1).

Свойство В: При всех i и k математические ожидания $\mathbf{M}\gamma_i^k = 0$, а значит, и $\mathbf{M}\xi_i = 0$.

Свойство Г: Имеет место следующее неравенство между вторыми моментами

$$\mathbf{M}S^2 \geqslant \frac{1}{10\,000}\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{s_k}\mathbf{D}\gamma_i^k. \tag{6.16}$$

Положим *

$$r_i = l + i[n^{1/3}+1]; \quad i = 0, 1, \ldots, t-1; \tag{6.17}$$

где число t определяется из неравенства $r_{t-1} < k \leqslant r_t + [n^{1/3}+1]$. Если положить

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \sum S_{r_{2i}, r_{2i+1}},\\ \xi_2 &= \sum S_{r_{2i+1}, r_{2i+2}}\end{aligned} \tag{6.18}$$

(где первая сумма берется по всем i, для которых $2i+1 \leqslant t$, вторая — по всем i, для которых $2i+2 \leqslant t$) и положить $\xi_3 = 0$, то

$$S = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3.$$

При $\gamma_i^1 = S_{r_{2i}, r_{2i+1}}$ и $\gamma_i^2 = S_{r_{2i+1}, r_{2i+2}}$ из результатов раздела 3.7 (для дискретного случая 3.6) и оценки (5.3) вытекает выполнение свойства A при $k = 1, 2$. Свойство $Б$ при $k = 1, 2$ следует сразу из равномерной ограниченности слагаемых. Свойство B следует из того, что, как мы предположили в 4.3, $\mathbf{M}X_i = 0$. Свойства A, $Б$ и B при $k = 3$ выполнены тривиальным образом. Однако, так как величины γ_i^k существенным образом зависимы, они могут взаимно уничтожаться при сложении, и свойство $Г$ может непоправимо нарушаться. Чтобы добиться выполнения свойства $Г$, мы несколько усложним описанную только что конструкцию, используя для этого методы § 4.

Положим

$$\begin{aligned}\gamma_i &= \mathbf{M}(S_{l, r_i}|\widetilde{\mathfrak{A}}_{r_i}), \quad i = 1, 2, \ldots, t,\\ \gamma_0 &= 0;\end{aligned} \tag{6.19}$$

* Под [ ] здесь понимается целая часть.

где σ-алгебры множеств $\widetilde{\mathfrak{A}}_k$ определены в разделе 1.3. Читатель, интересующийся лишь дискретным случаем, может подразумевать под $\widetilde{\mathfrak{A}}_k$ просто совокупность состояний системы в k-й момент времени. Положим далее

$$\widetilde{\gamma}_i = \begin{cases} \min(\gamma_i,\ 2C[n^{1/8}+1]), & \text{если } \gamma_i \geqslant 0, \\ \max(\gamma_i,\ -2C[n^{1/8}+1]), & \text{если } \gamma_i \leqslant 0 \end{cases} \tag{6.20}$$

и

$$\bar{\gamma}_i = \gamma_i - \widetilde{\gamma}_i. \tag{6.21}$$

Пусть далее $\widetilde{\varphi}_i = \widetilde{\gamma}_{i-1} + X_{r_{i-1}+1} + X_{r_{i-1}+2} + \cdots + X_{r_i} - \widetilde{\gamma}_i$; $i = 1, 2, \ldots, t$,

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}_{t+1} &= \widetilde{\gamma}_t, \\ \varphi_i &= \widetilde{\varphi}_i - \mathbf{M}\,\widetilde{\varphi}_i. \end{aligned} \tag{6.22}$$

Так как $\mathbf{M}\,S = 0$, имеем

$$S = \widetilde{\varphi}_1 + \widetilde{\varphi}_2 + \ldots + \widetilde{\varphi}_{t+1} = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_{t+1}, \tag{6.23}$$

так что, если положить

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \varphi_1 + \varphi_3 + \ldots + \varphi_{\widetilde{t}}, \\ \xi_2 &= \varphi_2 + \varphi_4 + \ldots + \varphi_{\widetilde{\widetilde{t}}}, \\ \xi_3 &= \varphi_{t+1}, \end{aligned} \tag{6.24}$$

где $\widetilde{t}$ — то из чисел t и $t-1$, которое нечетно, и $\widetilde{\widetilde{t}}$ — то из чисел t и $t-1$, которое четно, то

$$S = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3.$$

Положим также

$$\eta_i^1 = \varphi_{2i-1},\ \eta_i^2 = \varphi_{2i},\ s_1 = \frac{\widetilde{t}+1}{2},\quad s_2 = \frac{\widetilde{\widetilde{t}}}{2}.$$

Из определения $\widetilde{\gamma}_i$ следует, что $|\widetilde{\gamma}_i| \leqslant 2C[n^{1/8}+1]$. Так как $|X_i| \leqslant C$, то $|\widetilde{\varphi}_i| \leqslant 5C[n^{1/8}+1]$. Отсюда $|\varphi_i| \leqslant 10C[n^{1/8}+1]$. Кроме того, по определению, величины φ_i функционально зависят от состояния системы в моменты времени r_{i-1}, $r_{i-1}+1, \ldots, r_i$, так что по тем же причинам, что и в предыдущем абзаце, выполняются свойства A, $Б$, $В$, при $k = 1, 2$. При $k = 3$ эти свойства выполняются тривиальным образом, если положить $\eta_1^3 = \xi_3$, $s_1 = 1$.]

Труднее проверить выполнение свойства $Г$. Заметим, во-первых, что

$$\widetilde{\varphi}_i = (\gamma_{i-1} + S_{r_{i-1},\, r_i} - \gamma_i) + (\bar{\gamma}_i - \bar{\gamma}_{i-1}). \tag{6.25}$$

Из неравенства (6.10) следует, что

$$\mathbf{D}\,\varphi_i \leqslant \mathbf{M}\,\widetilde{\varphi}_i^2 \leqslant 3[\mathbf{M}(\gamma_{i-1} + S_{r_{i-1},\, r_i} - \gamma_i)^2 + \mathbf{M}\,\bar{\gamma}_i^2 + \mathbf{M}\,\bar{\gamma}_{i-1}^2]. \tag{6.26}$$

Далее, используя обозначения § 4, видим, что из леммы 3′ (для дискретного случая из леммы 3) следует соотношение

$$\mathbf{M}(\gamma_{i-1}+S_{r_{i-1},r_i}-\gamma_i)^2=\mathbf{D}(\gamma_{i-1}+S_{r_{i-1},r_i}-\gamma_i)=$$
$$=\overline{D}(\gamma_{i-1}+S_{r_{i-1},r_i}\,|\,\mathfrak{A}_{r_i})=\overline{D}(S_{l,r_i}|\,\mathfrak{A}_{r_i})-\overline{D}(S_{l,r_{i-1}}\,|\,\mathfrak{A}_{r_{i-1}}). \quad (6.27)$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^{t}\mathbf{M}(\gamma_{i-1}+S_{r_{i-1},r_i}-\gamma_i)^2=\overline{D}(S\,|\,\mathfrak{A}_k). \quad (6.28)$$

Для вывода свойства Γ надо еще оценить сверху $\mathbf{M}\overline{\gamma_i^2}$. Введем для этого случайные величины ψ_i; $i=1,2,\ldots,t$, определяемые как *

$$\psi_i=\begin{cases}(\gamma_{i-1}+(X_{r_{i-1}+1})^+ +(X_{r_{i-1}+2})^+ +\ldots+(X_{r_i})^+)^-, & \text{если } \gamma_{i-1}\leqslant 0,\\ (\gamma_{i-1}+(X_{r_{i-1}+1})^- +(X_{r_{i-1}+2})^- +\ldots+(X_{r_i})^-)^+, & \text{если } \gamma_{i-1}\geqslant 0.\end{cases} \quad (6.29)$$

(Очевидно, что при $\gamma_{i-1}=0$ оба выражения для ψ_i обращаются в нуль, так что это определение корректно). Говоря грубо, ψ_i — это та часть величины γ_{i-1}, которая не уничтожается слагаемыми X_j. Величина ψ_i обладает следующими замечательными свойствами: во-первых,

$$|\psi_i-\gamma_{i-1}+S_{r_{i-1},r_i}|\leqslant\sum_{k=r_{i-1}+1}^{r_i}|X_k^{(n)}|\leqslant C[n^{1/\delta}+1]. \quad (6.30)$$

В самом деле, пусть для определенности $\gamma_{i-1}\geqslant 0$. Тогда, по определению, $\psi_i\geqslant 0$. Если $\psi_i>0$, то

$$\psi_i-(\gamma_{i-1}+S_{r_{i-1},r_i})=\sum_{k=r_{i-1}+1}^{r_i}(X_k)^+\leqslant\sum_{k=r_{i-1}+1}^{r_i}|X_k|.$$

Если же $\psi_i=0$, то это значит, что

$$\gamma_{i-1}\leqslant-\sum_{k=r_{i-1}+1}^{r_i}(X_k)^-,$$

и отсюда снова следует (6.30). Во-вторых, при любом u таком, что $r_{i-1}<u\leqslant r_i$.

$$\psi_i(\gamma_{i-1}+S_{r_{i-1},u})\geqslant 0 \text{ и } |\psi_i|\leqslant|\gamma_{i-1}+S_{r_{i-1},u}|. \quad (6.31)$$

В самом деле, пусть снова $\gamma_{i-1}\geqslant 0$. Если $\psi_i=0$, то соотношение (6.31) выполняется тривиальным образом. Пусть поэтому $\psi_i>0$. Тогда

$$\gamma_{i-1}>-\sum_{k=r_{i-1}+1}^{r_i}(X_k)^-\geqslant-\sum_{k=r_{i-1}+1}^{u}(X_k)^-.$$

* См. примечание на стр. 371.

Отсюда $\gamma_{i-1} + S_{r_{i-1}, u} > 0$. Далее

$$\psi_i = \gamma_{i-1} + \sum_{k=r_{i-1}+1}^{r_i} (X_k)^- \leqslant \sum_{k=r_{i-1}+1}^{u} (X_k)^- +$$

$$+ \sum_{k=r_{i-1}+1}^{u} (X_k)^+ + \gamma_{i-1} \leqslant S_{r_{i-1}, u} + \gamma_{i-1}.$$

Для дальнейших оценок нам понадобится следующая лемма 8. Эта лемма будет доказана в разделах 6.4 и 6.5. Если ρ — некоторая случайная величина и число $a > 0$, мы будем полагать

$$\begin{aligned} (\rho)_a &= \rho - a, \quad \text{если} \quad \rho > a \\ (\rho)_a &= \rho + a, \quad \text{если} \quad \rho < -a \\ (\rho)_a &= 0 \qquad \text{если} \quad -a \leqslant \rho \leqslant a. \end{aligned} \tag{6.32}$$

Лемма 8. *Пусть заданы случайная величина χ с конечной дисперсией и σ-алгебра множеств $\mathfrak{A}$ *. Положим*

$$\beta = \mathbf{M}(\chi \mid \mathfrak{A}). \tag{6.33}$$

Тогда

$$\mathbf{M}[(\beta)_{2a}]^2 \leqslant 100\mathbf{M}[(\chi)_a]^2. \tag{6.34}$$

Для того, чтобы применить эту лемму, заметим, что по определению $\bar{\gamma}_i = (\gamma_i)_{2C[n^{1/\delta}+1]}$. Мы отмечали в § 4 (для дискретного случая соотношение (4.16), а для общего (4.44), что

$$\gamma_i = \mathbf{M}(\gamma_{i-1} + S_{r_{i-1}, r_i} \mid \mathfrak{A}_{r_i}). \tag{6.35}$$

Поэтому, по лемме 8,

$$\mathbf{M}\bar{\gamma}_i^2 \leqslant 100\mathbf{M}\{(\gamma_{i-1} + S_{r_{i-1}, r_i})_{C[n^{1/\delta}+1]}\}^2. \tag{6.36}$$

Далее, из (6.30) и (6.31) следует, что

$$|(\gamma_{i-1} + S_{r_{i-1}, r_i})_{C[n^{1/\delta}+1]}| \leqslant |\psi_i|, \tag{6.37}$$

так что

$$\mathbf{M}\bar{\gamma}_i^2 \leqslant 100\mathbf{M}\,\psi_i^2. \tag{6.38}$$

Далее, из (6.31) вытекает, что при $r_{i-1} < u < r_i$

$$\mathbf{M}\psi_i^2 \leqslant \mathbf{M}(\gamma_{i-1} + S_{r_{i-1}, u})^2 = \mathbf{D}(\gamma_{i-1} + S_{r_{i-1}, u}). \tag{6.39}$$

Как следует из основного свойства условной дисперсии (4.34) (для

* Читатель, интересующийся лишь дискретным случаем, может понимать под $\mathfrak{A}$ любую счетную систему несовместимых событий, дающую в сумме все пространство (см. раздел 4.2).

дискретного случая (4.5)), из леммы 2′ (соответственно леммы 2) и соотношения (4.44) (соответственно (4.16)),

$$\mathbf{D}(\gamma_{i-1}+S_{r_{i-1},u})=\overline{D}(\gamma_{i-1}+S_{r_{i-1},u}\mid\widetilde{\mathfrak{A}}_u)+\widetilde{D}(\gamma_{i-1}+S_{r_{i-1},u}\mid\widetilde{\mathfrak{A}}_u)=$$

$$=\overline{D}(S_{l,u}\mid\widetilde{\mathfrak{A}}_u)-\overline{D}(S_{l,r_{i-1}}\mid\widetilde{\mathfrak{A}}_{r_{i-1}})+\widetilde{D}(S_{l,u}\mid\widetilde{\mathfrak{A}}_u). \tag{6.40}$$

Заметим теперь, что если при одном из значений u $(r_{i-1}<u\leqslant r_i)$

$$\overline{D}(S_{l,u}\mid\widetilde{\mathfrak{A}}_u)-\overline{D}(S_{l,r_{i-1}}\mid\widetilde{\mathfrak{A}}_{r_{i-1}})\geqslant\frac{1}{2}\mathbf{D}(\gamma_{i-1}+S_{r_{i-1},u}), \tag{6.41}$$

то, так как дисперсия $\overline{D}(S_{l,u}\mid\widetilde{\mathfrak{A}}_u)$ монотонно возрастает с ростом u, из (6.39) и (6.38) следует, что

$$\overline{D}(S_{l,r_i}\mid\widetilde{\mathfrak{A}}_{r_i})-\overline{D}(S_{l,r_{i-1}}\mid\widetilde{\mathfrak{A}}_{r_{i-1}})\geqslant\frac{1}{2}\mathbf{M}\psi_i^2\geqslant\frac{1}{200}\mathbf{M}\overline{\gamma}_i^2. \tag{6.42}$$

Если же (6.41) не выполняется ни при одном u, то в соответствии с (6.40) и (6.39) при всех u $(r_{i-1}<u\leqslant r_i)$

$$\widetilde{D}(S_{l,u}\mid\widetilde{\mathfrak{A}}_u)\geqslant\frac{1}{2}\mathbf{M}\psi_i^2. \tag{6.43}$$

Но по лемме 4′ (соответственно 4)

$$\overline{D}(S_{l,u+1}\mid\widetilde{\mathfrak{A}}_{u+1})-\overline{D}(S_{l,u}\mid\widetilde{\mathfrak{A}}_u)\geqslant\frac{1}{4}\alpha_u^{(n)}\widetilde{D}(S_{l,u}\mid\widetilde{\mathfrak{A}}_u)\geqslant\frac{1}{8}\alpha_u^{(n)}\mathbf{M}\psi_i^2. \tag{6.44}$$

Так как

$$\sum_{u=r_{i-1}}^{r_i-1}\alpha_u^{(n)}\to\infty \tag{6.45}$$

при $n\to\infty$ равномерно по i (ведь $\alpha_u^{(n)}n^{1/2}\to\infty$), то мы получаем, что и в этом случае для достаточно больших n верна оценка (6.42). Суммируя (6.42) по всем i, находим, что

$$\sum_{i=1}^{t}M\overline{\gamma}_i^2\leqslant 200\,\overline{D}(S\mid\widetilde{\mathfrak{A}}_k). \tag{6.46}$$

Наконец, суммируя по всем i неравенство (6.26) и учитывая (6.28) и (6.46), находим, что

$$\sum_{i=1}^{t}\mathbf{D}\varphi_i\leqslant 2000\,\overline{D}(S\mid\widetilde{\mathfrak{A}}_k)\leqslant 2000\,\mathbf{D}S. \tag{6.47}$$

Далее

$$\mathbf{D}\xi_3=\mathbf{D}\widetilde{\varphi}_{t+1}\leqslant\mathbf{M}\varphi_{t+1}^2\leqslant\mathbf{M}\gamma_t^2\leqslant\mathbf{D}S. \tag{6.48}$$

Наконец, из (6.47) и (6.48) следует, очевидно, выполнение свойства Γ.

6.4. Мы привели без доказательства лемму 8. Докажем ее сначала в дискретном случае, когда $\mathfrak{A}$ является совокупностью несовместных

событий $A_1, A_2, \ldots$. Для этого фиксируем k и рассмотрим величину χ при условии A_k. Пусть $\gamma = \mathbf{M}(\chi \mid A_k)$. Дадим оценку снизу для $\mathbf{M}\left[\left(\chi - \frac{\gamma}{2}\right)^+\right]^2$. В качестве первой возможности предположим, что $\mathbf{P}\left\{\chi \geqslant \frac{3}{4}\gamma\right\} \geqslant \frac{1}{2}$. Тогда $\mathbf{M}\,[(\chi - \gamma/2)^+]^2 \geqslant \gamma^2/32$. Если же $\mathbf{P}\{\chi \leqslant \frac{3}{4}\gamma\} \geqslant \frac{1}{2}$, то $\mathbf{M}\,|(\chi - \gamma)^-| \geqslant \frac{1}{8}\gamma$. Следовательно, и $\mathbf{M}\,|(\chi - \gamma)^+| \geqslant \frac{1}{8}\gamma$. Отсюда, если $F(x) = \mathbf{P}\{\chi < x\}$, то

$$\mathbf{M}\left[\left(\chi - \frac{\gamma}{2}\right)^+\right]^2 \geqslant \int\limits_{|x| \geqslant \gamma} \left(x - \frac{\gamma}{2}\right)^2 dF(x) \geqslant \frac{\gamma}{2} \int\limits_{|x| \geqslant \gamma} \left|x - \frac{\gamma}{2}\right| dF(x) \geqslant \frac{\gamma^2}{16}.$$

Итак, при любом A_k

$$\mathbf{M}\left\{\left[\left(\chi - \frac{\gamma}{2}\right)^+\right]^2 \Big| A_k\right\} \geqslant \frac{\gamma^2}{32}. \tag{6.49}$$

Если обозначить $\widetilde{A}_k$ те из A_i, для которых $\gamma \geqslant 2a$, то, по определению, $\mathbf{M}\,[(\beta)_{2a}]^2$ равно

$$\sum_k \mathbf{P}\{\widetilde{A}_k\}\,[\mathbf{M}(\chi \mid \widetilde{A}_k)]^2 \tag{6.50}$$

плюс аналогичная сумма по событиям A_k, для которых $\gamma \leqslant -2a$. Эта вторая сумма оценивается аналогичным образом, и мы будем поэтому рассматривать лишь сумму (6.50). Из (6.49) следует, что

$$\sum_k \mathbf{P}\{\widetilde{A}_k\}\,[\mathbf{M}(\chi \mid \widetilde{A}_k)]^2 \leqslant 32 \sum_k \mathbf{P}\{\widetilde{A}_k\}\,\mathbf{M}\{[(\chi - a)^+]^2 \mid \widetilde{A}_k\} \leqslant$$
$$\leqslant 32\mathbf{M}\,[(\chi - a)^+]^2 \leqslant 32\mathbf{M}\,[(\chi)_a]^2, \tag{6.51}$$

откуда и вытекает утверждение леммы.

6.5. Получим теперь утверждение леммы 8 в наиболее общем случае. Будем опираться для этого на только что доказанный дискретный вариант этой леммы. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать систему событий $A_i \in \mathfrak{A}$ так, чтобы, если обозначить через $\widetilde{\mathfrak{A}}$ σ-алгебру множеств, порожденную множествами $\{A_i\}$, и положить $\widetilde{\beta} = \mathbf{M}(\chi \mid \widetilde{\mathfrak{A}})$, то

$$|\mathbf{M}\,[(\widetilde{\beta})_{2a}]^2 - \mathbf{M}\,[(\beta)_{2a}]^2| \leqslant \varepsilon. \tag{6.52}$$

В самом деле, для этого достаточно, взяв достаточно большое m, выбрать в качестве системы событий $\{A_i\}$; $i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$ события

$$\left\{2a + \frac{i}{m} \leqslant \beta < 2a + \frac{i+1}{m}\right\}; \qquad i = 0, 1, \ldots,$$
$$\left\{-2a + \frac{i+1}{m} \geqslant \beta > -2a + \frac{i}{m}\right\}; \qquad i = -1, -2, \ldots.$$

Из (6.52) и результатов раздела 6.4 очевидным образом вытекает утверждение леммы.

6.6. Если выполнены условия теоремы 1, то тем более выполнены условия теоремы 2. Поэтому можно использовать лемму 6, сводящую

вопрос к изучению сумм независимых величин, а значит, применима лемма 7 при $\nu_m^{(n)} = (\widetilde{\sigma}^{(n)})^{-1}\widetilde{S}_m^{(n)}$ (обозначения см. в формулировках лемм 6 и 7.) Положим в лемме 7 $r = 3$, а через ${}_i\mu_m^{(n)}$ будем обозначать величины $(\widetilde{\sigma}^{(n)})^{-1}\xi_i$, где слагаемое ξ_i определено в разделе 6.3 и соответствует сумме $S^{(n)}_{l_m^{(n)}, k_{m+1}^{(n)}}$ (имеющей то же распределение, что и сумма $\widetilde{S}_m^{(n)}$). В соответствии с леммой 7 для доказательства теоремы достаточно проверить выполнение при $i = 1, 2, 3$ соотношения (6.8). При выполнении этой проверки будем опираться лишь на свойства A, $Б$, B и $Г$ величин ξ_i, установленные в разделе 6.3. Так как эти свойства симметричны относительно i, то мы будем рассматривать лишь случай $i = 1$. В соответствии с указанными только что свойствами величины ${}_1\mu_m^{(n)}$ допускают в нашем случае представление в виде сумм величин $(\widetilde{\sigma}^{(n)})^{-1}\eta$. Положим

$$\widetilde{\zeta}^{(n)}_{m,r} = (\widetilde{\sigma}^{(n)})^{-1}\eta_{1r}^1; \quad m = 0, 1, \ldots, g^{(n)}; \quad n = 1, 2, \ldots; \quad r = 1, 2, \ldots, u_m^{(n)}, \tag{6.53}$$

где слагаемое η_r^1, определенное в разделе 6.3, соответствует величине $S^{(n)}_{l_m^{(n)}, k_{m+1}^{(n)}}$ и где $u_m^{(n)} = s_1$ (конечно η_1^r и s_1 зависят от m и n). В новых обозначениях

$${}_1\mu_m^{(n)} = \sum_{r=1}^{u_m^{(n)}} \widetilde{\zeta}^{(n)}_{m,r}. \tag{6.54}$$

Так как величины ${}_1\mu_m^{(n)}$ при фиксированном n и различных m независимы, то можно считать также независимыми величины $\widetilde{\zeta}^{(n)}_{m,r}$. Из свойства $Г$ раздела 6.3 вытекает, что

$$\sum_{m=0}^{g^{(n)}} \sum_{r=1}^{u_m^{(n)}} \mathbf{D}\widetilde{\zeta}^{(n)}_{m,r} \leqslant 10\,000. \tag{6.55}$$

Положим

$$\zeta^{(n)}_{m,r} = \frac{1}{\sqrt{10\,000}}\widetilde{\zeta}^{(n)}_{m,r}. \tag{6.56}$$

Для того, чтобы проверить условие (6.8) леммы 7, достаточно проверить, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{g^{(n)}} \int_{|x|\geqslant\varepsilon} x^2\, dH_m^{(n)}(x) = 0, \tag{6.57}$$

где

$$H_m^{(n)}(x) = \mathbf{P}\left\{\sum_{r=1}^{u_m^{(n)}} \zeta^{(n)}_{m,r} < x\right\}. \tag{6.58}$$

Очевидно, что

$$\sum_{m=0}^{g^{(n)}} \sum_{r=1}^{u_m^{(n)}} \mathbf{D}\zeta_{m,r}^{(n)} \leqslant 1. \tag{6.59}$$

Далее, из свойства $Б$ и основной оценки дисперсии, содержащейся в лемме 2, следует, что

$$|\zeta_{m,r}^{(n)}| \leqslant \psi(n), \tag{6.60}$$

где $\psi(n) \to 0$ при $n \to \infty$. Далее, из свойства $Г$ и утверждения (5.45) леммы 6 следует, что равномерно по m

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{u_m^{(n)}} \mathbf{D}\zeta_{m,r}^{(n)} = 0. \tag{6.61}$$

Наконец, в соответствии со свойствами $А$ величины $\zeta_{m,r}^{(n)}$ образуют при фиксированных m и n цепь Маркова, коэффициенты эргодичности которой не превосходят оценки (6.14). Отметим также, что в соответствии со свойством $В$ имеем $\mathbf{M}\zeta_{m,r}^{(n)} = 0$.

Резюмируя обсуждение, проведенное в этом абзаце, сделаем следующий вывод. Для того, чтобы доказать полностью теорему 1, нам достаточно доказать следующую лемму:

Лемма 9. *Пусть задана последовательность $n = 1, 2, \ldots$ серий независимых внутри каждой серии (т. е. при фиксированном n) величин $\pi_m^{(n)}$; $m = 0, 1, \ldots, g^{(n)}$, имеющих нулевые математические ожидания и конечные дисперсии. Пусть каждая из величин $\pi_m^{(n)}$ представляется, в свою очередь, в виде суммы*

$$\pi_m^{(n)} = \sum_{k=1}^{u_m^{(n)}} \zeta_{m,k}^{(n)}, \tag{6.62}$$

где, во-первых, величины $\zeta_{m,k}^{(n)}$ независимы при фиксированном n и разных m; во-вторых, при фиксированных n и m величины $\zeta_{m,k}^{(n)}$ связаны в цепь Маркова с $u_m^{(n)}$ моментами времени, причем коэффициенты эргодичности операторов перехода за один шаг все не меньше числа

$$1 - \left(1 - \frac{f(n)}{2n^{1/3}}\right)^{n^{1/3}}, \tag{6.63}$$

где $f(n) \to \infty$ при $n \to \infty$; в-третьих,

$$\sum_{m=0}^{g^{(n)}} u_m^{(n)} \leqslant n; \tag{6.64}$$

в-четвертых,

$$D^{(n)} = \sum_{m=0}^{g^{(n)}} \sum_{k=1}^{u_m^{(n)}} \mathbf{D}\,\zeta_{m,k}^{(n)} \leqslant 1;$$

в-пятых, равномерно по m

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{u_m^{(n)}} \mathbf{D}\,\zeta_{m,k}^{(n)} = 0; \tag{6.66}$$

и, в-шестых, для некоторой функции $\psi(n) \to 0$ *при* $n \to \infty$

$$|\zeta_{m,k}^{(n)}| \leqslant \psi(n). \tag{6.67}$$

Тогда, если обозначить через $H_m^{(n)}(x)$ *функцию распределения величины* $\pi_m^{(n)}$, *то при любом* $a > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{g^{(n)}} \int_{|x|\geqslant a} x^2\, dH_m^{(n)}(x) = 0. \tag{6.68}$$

6.7. Укажем следующее следствие из условий только что сформулированной леммы:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{g^{(n)}} \left| \mathbf{D}\,\pi_m^{(n)} - \sum_{k=1}^{u_m^{(n)}} \mathbf{D}\,\zeta_{m,k}^{(n)} \right| = 0. \tag{6.69}$$

В самом деле, этот факт вытекает сразу в результате применения к представлению в виде суммы (6.62) оценки (5.28), если учесть при этом (6.65).

6.8. В этом разделе мы докажем лемму 9 в случае, когда $f(n)/\ln n \to \infty$. Как следует из рассмотрений предыдущего раздела, из этого вытекает теорема 1 при условии $\alpha^{(n)} n^{1/3} (\ln n)^{-1} \to \infty$. Доказательству леммы 9 при наиболее общем условии $f(n) \to \infty$ посвящен § 7.

Заметим, что если, как мы предположили, $f(n)(\ln n)^{-1} \to \infty$, то при достаточно больших n

$$1 - \left(1 - \frac{f(n)}{2n^{1/3}}\right)^{n^{1/3}} \geqslant 1 - \frac{1}{n^{10}}. \tag{6.70}$$

Положим

$$T^{(n)} = \sum_{m=0}^{g^{(n)}} \pi_m^{(n)}. \tag{6.71}$$

Очевидно, что

$$\mathbf{M}T^{(n)} = 0, \quad \mathbf{D}T^{(n)} = \sum_{m=0}^{g^{(n)}} \mathbf{D}\pi_m^{(n)}. \tag{6.72}$$

Из (6.69) следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\left|\mathbf{D}T^{(n)}-\sum_{m=0}^{g^{(n)}}\sum_{k=1}^{u_m^n}\mathbf{D}\pi_m^{(n)}\right|=0. \tag{6.73}$$

В этом абзаце мы предположим, что

$$\mathbf{D}T^{(n)}\geqslant\psi(n). \tag{6.74}$$

(Определение $\psi(n)$ см. в (6.67)). Обозначим через $\bar\zeta_{m,k}^{(n)}$ величины, имеющие соответственно те же распределения, что и величины $\zeta_{m,k}^{(n)}$, но независимые в совокупности по всем m, k при фиксированном n. Рассуждая точно так же, как и в разделе 5.6, находим, что при любом x и достаточно большом n

$$\left|\mathbf{P}\left\{\sum_{m=0}^{g^{(n)}}\sum_{k=1}^{u_m^{(n)}}\bar\zeta_{m,k}^{(n)}<x\right\}-\mathbf{P}\left\{\sum_{m=1}^{g^{(n)}}\sum_{k=1}^{u_m^{(n)}}\zeta_{m,k}^{(n)}<x\right\}\right|\leqslant\frac{2}{n^{10}}\sum_{m=1}^{g^{(n)}}u_m^{(n)}\leqslant\frac{2}{n^9}\to0 \tag{6.75}$$

при $n\to\infty$. Из (6.73) следует, что при больших n

$$\mathbf{D}^{(n)}=\sum_{m=0}^{g^{(n)}}\sum_{k=1}^{u_m^{(n)}}\mathbf{D}\bar\zeta_{m,k}^{(n)}\geqslant\frac{\psi(n)}{2}. \tag{6.76}$$

Из (6.76) и (6.67) следует, что величины $(D^{(n)})^{-1/2}\bar\zeta_{m,k}^{(n)}$ не превосходят числа $\sqrt{2\psi(n)}\to0$ при $n\to\infty$. Из известных результатов теории сумм независимых случайных величин (см., например, теорему, сформулированную в разделе 6.2) следует, что последовательность величин с единичной дисперсией

$$(D^{(n)})^{-1/2}\left(\sum_{m=0}^{g^{(n)}}\sum_{k=1}^{u_m^{(n)}}\bar\zeta_{m,k}^{(n)}\right) \tag{6.77}$$

является асимптотически нормальной. Соотношение (6.75) показывает, что асимптотически нормальной является также и последовательность величин

$$(D^{(n)})^{-1/2}\left(\sum_{m=0}^{g^{(n)}}\pi_m^{(n)}\right). \tag{6.78}$$

Соотношение (6.73) означает, что последовательность величин (6.78) имеет дисперсии, стремящиеся к 1, так что из утверждения о необходимости содержащегося в теореме раздела 6.2 следует, что утверждение (6.68) выполняется, если заменить в нем функции распределения $H_m^{(n)}(x)$ на функции распределения величин $(D^{(n)})^{-1/2}\pi_m^{(n)}$. Наконец, условие (6.65) показывает, что выполнено и само утверждение (6.68).

Предположим теперь, что, наоборот, при всех

$$\mathbf{D}T^{(n)}\leqslant\psi(n). \tag{6.79}$$

Тогда

$$\mathbf{D}T^{(n)} = \sum_{m=0}^{g^{(n)}} \mathbf{M}\,(\pi_m^{(n)})^2 \to 0, \tag{6.80}$$

и отсюда следует, очевидным образом, (6.68). Наконец, общий случай сводится к двум только что рассмотренным разбиениям основной последовательности на две подпоследовательности.

§ 7. Доказательство теоремы об асимптотической нормальности в общем случае

7.1. Мы существенно воспользуемся принадлежащими Леви результатами о центральной предельной теореме для последовательности случайных величин $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$, образующих мартингал (см. [22], стр. 237—243). Нам будет удобно иметь дело не с самим мартингалом $S_1, \ldots, S_n$, а с последовательностью разностей $S_1, S_2 - S_1, S_3 - S_2, \ldots$. Будем называть такую последовательность — последовательностью мартингал-разностей. Перейдем к точным определениям (общие вопросы теории мартингала см. [14], гл. VII). Пусть заданы n σ-алгебр множеств $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$ и последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ такие, что

1. Величина ξ_i измерима относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}_i$.
2. При любом $i \leqslant n$ имеет место равенство (см. примечание на стр. 26)

$$\mathbf{M}\{\xi_i \mid \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \ldots \times \mathfrak{B}_{i-1}\} = 0. \tag{7.1}$$

Тогда будем говорить, что последовательность величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ является последовательностью мартингал-разностей. Несколько огрубляя, можно сказать, что последовательность случайных величин образует мартингал-разности, если при любых условиях на прошлое, условное математическое ожидание величины ξ_i остается равным нулю. Иногда мы будем считать $n = \infty$. Определение мартингал-разностей претерпевает при этом очевидные изменения.

Из данного выше определения следует, как легко видеть, что $\mathbf{M}\xi_i = 0$ и

$$\mathbf{D}(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = \mathbf{D}\xi_1 + \ldots + \mathbf{D}\xi_n, \tag{7.2}$$

если эти дисперсии существуют.

В качестве первого примера мартингал-разностей может служить просто последовательность независимых случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями. В качестве второго чуть более сложного примера рассмотрим случай, когда заданы две последовательности независимых внутри каждой из последовательностей величин $\eta_1, \ldots, \eta_n$ и $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ с нулевым математическим ожиданием, причем с вероятностью $1/2$ все величины ξ_i совпадают с величинами η_i и с вероятностью $1/2$ все величины ξ_i совпадают с величинами ζ_i.

Интересующий нас результат Леви имеет несколько непривычную формулировку. Ввиду этого сделаем некоторые замечания, показывающие

естественность этого результата. Рассмотрим аналогично тому, как это делается обычно для независимых величин или величин, связанных в цепь Маркова, схему серий $n = 1, 2, \ldots$ величин $\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_n^{(n)}$, образующих при фиксированном n мартингал-разности, и положим $S^{(n)} = \xi_1^{(n)} + \ldots + \xi_n^{(n)}$. Второй из приведенных выше примеров показывает, что ограничения типа регулярности не приводят к асимптотической нормальности величин $S^{(n)}$. В самом деле, если каждая из серий устроена подобно тому, как это описано во втором примере, то предельное распределение для $S^{(n)}$ будет, вообще говоря, «смесью» двух нормальных распределений с разными дисперсиями и, следовательно, отлично от нормального. Однако трудность, проявляющаяся в разобранном примере, является основной. Она устраняется при несколько видоизмененной постановке задачи, предложенной Леви.

Сформулируем теперь результат Леви (см. [22], стр. 243). Пусть задана бесконечная последовательность величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$, образующая мартингал, и пусть величины ξ_i имеют все конечные дисперсии. Пусть $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$ — соответствующие σ-алгебры множеств. Определим случайные величины d_i как

$$\begin{aligned} d_i &= \mathbf{M}\{(\xi_{i+1})^2 \mid \mathfrak{B}_1 \times \ldots \times \mathfrak{B}_i\}, \quad i \geqslant 1 \\ d_0 &= \mathbf{M}\xi_1^2 \end{aligned} \tag{7.3}$$

(т. е. d_i — условная дисперсия величины ξ_{i+1} при заданном прошлом). Определим случайный индекс ν при помощи неравенства

$$d_0 + d_1 + \ldots + d_{\nu-1} < 1 \leqslant d_0 + d_1 + \ldots + d_\nu. \tag{7.4}$$

Мы предположим дополнительно, что с вероятностью 1

$$\sum_{i=0}^{\infty} d_i \geqslant 1. \tag{7.5}$$

Тогда соотношение (7.4) определяет ν однозначно. Определим далее случайную величину γ из соотношения

$$d_0 + d_1 + \ldots + d_{\nu-1} + \gamma d_\nu = 1. \tag{7.6}$$

Очевидно, что $0 < \gamma \leqslant 1$. Положим, наконец,

$$\widetilde{S} = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_\nu + \gamma^{1/2}\xi_{\nu+1}. \tag{7.7}$$

Нетрудно показать, что

$$\mathbf{M}\widetilde{S} = 0, \quad \mathbf{D}\widetilde{S} = 1. \tag{7.8}$$

Очевидно также, что событие $\{\nu = i\} \in \mathfrak{B}_1 \times \ldots \times \mathfrak{B}_i$ и что случайная величина γ такова, что для любого x событие

$$\{\gamma < x\} \cap \{\nu = i\} \in \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \ldots \times \mathfrak{B}_n.$$

Теорема Леви. *Пусть с вероятностью* 1 *при всех* i *и некоторой постоянной* $\varepsilon > 0$

$$|\xi_i| \leqslant \varepsilon. \tag{7.9}$$

Тогда при всех x

$$\left|\mathbf{P}\{\widetilde{S}<x\}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}\,dt\right|\leqslant 6\varepsilon^{1/4}. \tag{7.10}$$

Из этой точной оценки следует, конечно, что если рассмотреть схему серий величин, образующих мартингал-разности, причем слагаемые n-й серии будут равномерно ограничены постоянной $\varepsilon^{(n)}\to 0$ при $n\to\infty$, то соответствующая последовательность $\widetilde{S}^{(n)}$ окажется асимптотически нормальной.

7.2. В соответствии с результатами раздела 6.6, наша цель — доказать лемму 9. Для этого нам надо уметь оценивать сверху величины вида

$$\int\limits_{|x|\geqslant a}x^2dF(x), \tag{7.11}$$

где $F(x)$ — функция распределения суммы величин, связанных в цепь Маркова. Мы сведем в разделе 7.3 эту задачу к тому ее частному случаю, когда величины, связанные в цепь, образуют, если их расставить в обратном порядке, мартингал-разности, и поэтому займемся теперь именно этим частным случаем.

В этом разделе будет доказана следующая

Лемма 10. *Пусть последовательность случайных величин* $Y_1,\ldots,Y_n$ *образует цепь Маркова с* n *моментами времени и пространствами состояний* $(\Omega_i,\ \mathfrak{A}_i)$, *причем все коэффициенты эргодичности переходных вероятностей не меньше числа* $1-\eta$

$$\begin{gathered}\mathbf{M}Y_i=0,\quad \mathbf{D}Y_i<\infty;\qquad i=1,2,\ldots,n,\\ \mathbf{D}(Y_1+Y_2+\ldots+Y_n)=1\end{gathered} \tag{7.12}$$

и с вероятностью 1 *при всех* i

$$|Y_i|\leqslant\varepsilon. \tag{7.13}$$

Пусть σ*-алгебры* $\widetilde{\mathfrak{A}}_i$ *определены так же, как и в разделе* 1.3. *Предположим также, что если положить* $\xi_1=Y_n,\ \xi_2=Y_{n-1},\ldots,\xi_n=Y_1$, *то последовательность величин* $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ *вместе с последовательностью* σ*-алгебр* $\widetilde{\mathfrak{A}}_n,\widetilde{\mathfrak{A}}_{n-1},\ldots,\widetilde{\mathfrak{A}}_1$ *образует мартингал-разности. Тогда, если* $S=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$ *и* $F(x)=\mathbf{P}\{S<x\}$, *то для любого* $a>0$

$$\int\limits_{|x|\geqslant a}x^2dF(x)\leqslant\left(2+\frac{2}{a^2}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{a/2}^{\infty}x^2e^{-x^2/2}\,dx+6a^2\,\varepsilon^{1/4}+\sqrt{2\varepsilon^2+c^2\eta}\right), \tag{7.14}$$

где $c<\infty$ — *некоторая постоянная.*

Доказательство леммы. Для того, чтобы иметь возможность применить теорему Леви, определим дополнительно случайные величины $\xi_{n+1},\ \xi_{n+2},\ldots$ так, чтобы эти величины были независимы в совокупности и не зависели от величин $\xi_i,\ i\leqslant n$ и чтобы каждая из этих величин имела равномерное на отрезке $[-\varepsilon,\varepsilon]$ распределение. Очевидно,

что последовательность величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ образует мартингал-разности и что выполняется условие (7.5). Примем теперь определения величины $\widetilde{S}$, ν, γ, приведенные в разделе 7.1. Пусть $\widetilde{F}(x)$ — функция распределения величины $\widetilde{S}$. Из теоремы Леви следует, что

$$\left| \int\limits_{|x|<a} x^2 d\widetilde{F}(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-a}^{a} x^2 e^{-x_2/2}\, dx \right| \leqslant 6a^2 \varepsilon^{1/4}. \tag{7.15}$$

Как мы уже отмечали, $\mathbf{M}(\widetilde{S})^2 = 1$. Поэтому

$$\int\limits_{|x|\geqslant a} x^2 d\widetilde{F}(x) \leqslant \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{a}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2}\, dx + 6a^2 \varepsilon^{1/4}. \tag{7.16}$$

Для того чтобы получить из (7.16) искомую оценку (7.14), надо уметь сравнивать величины S и $\widetilde{S}$. Этим мы и займемся. Заметим, во-первых, что из неравенства (5.28), полученного в разделе 5.8, следует, что существует константа $c > 0$ такая, что для всех достаточно малых η

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \mathbf{D}Y_i - 1 \right| \leqslant c\sqrt{\eta}. \tag{7.17}$$

Рассмотрим теперь последовательность случайных величин $d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}$. Заметим, что, по определению,

$$\mathbf{M}d_i = \mathbf{D}Y_{n-i}, \tag{7.18}$$

так что

$$\left| \mathbf{M}\left(\sum_{i=0}^{n-1} d_i \right) - 1 \right| \leqslant c\sqrt{\eta}. \tag{7.19}$$

Из условия (7.13) следует, что с вероятностью 1

$$|d_i| \leqslant \varepsilon^2; \quad i = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{7.20}$$

В соответствии с известным свойством обратимости цепи Маркова (см. [14], гл. II, § 6) последовательность величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ связана в цепь Маркова с пространствами состояний $(\Omega_n, \mathfrak{A}_n)$, $(\Omega_{n-1}, \mathfrak{A}_{n-1}), \ldots, (\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$. Следовательно, случайная величина d_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$ зависит от состояния системы в момент времени $n - i + 1$; говоря точнее, измерима относительно σ-алгебры $\widetilde{\mathfrak{A}}_{n-i+1}$. Величина $d_0 = \text{const}$. Поэтому ее учет вводит в рассуждения лишь тривиальные изменения, которые мы не будем оговаривать особо. Если рассмотреть последовательность величин d_{n-1}, $d_{n-2}, \ldots, d_1$, то она будет связана в ту же цепь Маркова, что и последовательность величин $Y_2, Y_3, \ldots, Y_n$. Следовательно, снова применимо неравенство (5.28), и, учитывая (7.20), а затем (7.19), видим, что при достаточно малых η

$$\mathbf{D}\left(\sum_{i=0}^{n-1} d_i \right) \leqslant (K\sqrt{\eta} + 1) \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{D}d_i \leqslant \varepsilon(1 + K\sqrt{\eta}) \left(\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{M}d_i \right) \leqslant 2\varepsilon^2. \tag{7.21}$$

Из (7.19) и (7.21) следует, что

$$\mathbf{M}\Big(\sum_{i=0}^{n-1} d_i - 1\Big)^2 = \mathbf{D}\Big(\sum_{i=0}^{n-1} d_i\Big) + \Big[\mathbf{M}\Big(\sum_{i=0}^{n-1} d_i\Big) - 1\Big]^2 \leqslant 2\varepsilon^2 + c^2\gamma_1. \quad (7.22)$$

Неравенство (7.22) позволит нам оценить сверху величину

$$\mathbf{M}(S - \widetilde{S})^2 = \mathbf{M}[(S - \widetilde{S})^+]^2 + \mathbf{M}[(S - \widetilde{S})^-]^2. \quad (7.23)$$

Мы займемся сейчас первым из этих двух слагаемых. Определим следующим образом вспомогательную случайную величину φ_i

$$\begin{aligned} &\varphi_i = 1, && \text{если } \nu < i-1,\\ &\varphi_i = 1 - \gamma^{1/3}, && \text{если } \nu = i-1,\\ &\varphi_i = 0, && \text{если } \nu > i-1 \end{aligned} \quad (7.24)$$

(определение величин ν и γ см. (7.4) и (7.6)). Положим теперь

$$\widetilde{\xi}_i = \varphi_i \xi_i; \quad i = 1, 2, \ldots, n. \quad (7.25)$$

Как легко видеть,

$$(S - \widetilde{S})^+ = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\xi}_i. \quad (7.26)$$

Нетрудно показать, что последовательность величин $\widetilde{\xi}_1, \widetilde{\xi}_2, \ldots, \widetilde{\xi}_n$ образует мартингал (доказательство аналогичных утверждений см. [14], гл. VII, § 2), так что

$$\mathbf{M}\widetilde{\xi}_i = 0, \quad \mathbf{M}[(S - \widetilde{S})^+]^2 = \mathbf{D}\Big(\sum_{i=1}^{n} \widetilde{\xi}_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}\widetilde{\xi}_i^2. \quad (7.27)$$

Из определения величин γ и ν и неравенства $1 - \gamma \geqslant (1 - \gamma^{1/3})^2$ следует, что

$$\Big(\sum_{i=0}^{n-1} d_i - 1\Big)^+ = \sum_{i=0}^{n-1} d_i (\varphi_{i+1})^2. \quad (7.28)$$

Наконец, учитывая, что, по определению, случайная величина ξ_i измерима относительно σ-алгебры множеств $\widetilde{\mathfrak{A}}_n \times \widetilde{\mathfrak{A}}_{n-1} \times \ldots \times \widetilde{\mathfrak{A}}_{n-i+2}$, видим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\widetilde{\varphi}_i)^2 = \mathbf{M}(\varphi_i \xi_i)^2 = \mathbf{M}\{\mathbf{M}[(\varphi_i \xi_i)^2 \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_n \times \widetilde{\mathfrak{A}}_{n-1} \times \ldots \times \widetilde{\mathfrak{A}}_{n-i+2}]\} = \\ = \mathbf{M}\{\varphi_i^2\, \mathbf{M}[\xi_i^2 \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_n \times \widetilde{\mathfrak{A}}_{n-1} \times \ldots \times \widetilde{\mathfrak{A}}_{n-i+2}]\} = \mathbf{M}\{\varphi_i^2 d_{i-1}\}. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Сравнивая (7.29), (7.28) и (7.27), находим

$$\mathbf{M}[(S - \widetilde{S})^+]^2 \leqslant \mathbf{M}\Big[\Big(\sum_{i=0}^{n-1} d_i - 1\Big)^+\Big]. \quad (7.30)$$

Аналогичные рассуждения показывают, что

$$\mathbf{M}[(S - \widetilde{S})^-]^2 \leqslant \mathbf{M}\Big|\Big(\sum_{i=0}^{n-1} d_i - 1\Big)^-\Big|. \quad (7.31)$$

Наконец, из (7.30), (7.31) и (7.32) видим, что

$$\mathbf{M}(S-\widetilde{S})^2 \leqslant \mathbf{M}\left|\sum_{i=0}^{n-1} d_i - 1\right| \leqslant \sqrt{2\varepsilon^2 + c^2\eta}. \tag{7.32}$$

Применим теперь неравенство (6.9) к сумме $S = (S-\widetilde{S}) + \widetilde{S}$; имеем, используя также (7.16) и (7.32),

$$\int\limits_{|x|\geqslant a} x^2 dF(x) \leqslant \left(2 + \frac{2}{a^2}\right)\left[\int\limits_{|x|\geqslant a/2} x^2 d\widetilde{F}(x) + \mathbf{M}(S-\widetilde{S})^2\right] \leqslant$$
$$\leqslant \left(2 + \frac{2}{a^2}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{a/2}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2}\,dx + 6a^2\varepsilon^{1/3} + \sqrt{2\varepsilon^2 + c^2\eta}\right), \tag{7.33}$$

что и требовалось доказать.

7.3. Мы обобщим лемму 10 на тот случай, когда величины $Y_1, \ldots, Y_n$ уже не образуют мартингал.

Лемма 11. *Пусть последовательность величин $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ образует цепь Маркова с n моментами времени и пространствами состояний $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i)$, причем все коэффициенты эргодичности переходных вероятностей не меньше $1-\eta$, где $\eta \leqslant 1/2$ и*

$$\mathbf{M}Y_i = 0, \quad \mathbf{D}Y_i < \infty; \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$\mathbf{D}Y_1 + \mathbf{D}Y_2 + \ldots + \mathbf{D}Y_n = 1. \tag{7.34}$$

Пусть, наконец, с вероятностью 1 при всех i

$$|Y_i| \leqslant \varepsilon. \tag{7.35}$$

Положим $S = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$ и $F(x) = \mathbf{P}\{S < x\}$. Тогда для любого целого $r \geqslant 1$ и любого $a > 0$ имеет место оценка

$$\int\limits_{|x|\geqslant a} x^2 dF(x) \leqslant \frac{L}{a^2}\left(1 + \frac{1}{c^2}\right) r^3 \left[\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{a/2}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2}\,dx + 12a^2\varepsilon^{1/3} + \right.$$
$$\left. + \sqrt{4\varepsilon + c^2\eta} + \left(\frac{7}{8}\right)^{r-1}\right], \tag{7.36}$$

где $L < \infty$ — некоторая постоянная.

Доказательство леммы. Определим σ-алгебры $\widetilde{\mathfrak{A}}_i$ так же, как и в лемме 10. Построим, далее, рекуррентным образом совокупность величин $Y_i^{(r)}$; $r = 1, 2, \ldots, n$; $i = r, \ldots, n$. А именно, мы положим

$$Y_i^{(1)} = Y_i,$$
$$Y_i^{(r)} = \mathbf{M}(Y_{i-1}^{(r-1)} \mid \widetilde{\mathfrak{A}}_i); \quad r = 2, 3, \ldots, n. \tag{7.37}$$

Как легко видеть, при всех i и r

$$\mathbf{M}Y_i^{(r)} = 0. \tag{7.38}$$

Положим теперь

$$Z_i^{(r)} = Y_i^{(r)} - Y_{i+1}^{(r)}; \quad i = r, r+1, \ldots, n-1,$$
$$Z_n^{(r)} = Y_n^{(r)}. \tag{7.39}$$

Общее тождество (4.34) вместе с соотношением (4.31) показывает, что для всех i и r

$$\mathbf{D}Z_i^{(r)} + \mathbf{D}Y_{i+1}^{(r+1)} = \mathbf{D}Y_i^{(r)}. \tag{7.40}$$

Из результатов раздела 4.9 вытекает, что

$$\mathbf{D}Y_{i+1}^{(r+1)} \leqslant \tfrac{7}{8}\,\mathbf{D}Y_i^{(r)}. \tag{7.41}$$

Используя (7.34), видим, что из (7.41) следует, что при любом r

$$\sum_{i=r}^{n} \mathbf{D}Y_i^{(r)} \leqslant \left(\tfrac{7}{8}\right)^{r-1}. \tag{7.42}$$

Из определения величин $Z_i^{(r)}$ следует, что при любом r

$$S = \sum_{i=1}^{n} Z_i^{(1)} + \sum_{i=2}^{n} Z_i^{(r)} + \ldots + \sum_{i=r}^{n} Z_i^{(r)} + \sum_{i=r+1}^{n} Y_i^{(r+1)}. \tag{7.43}$$

Именно на этом представлении величины S в виде суммы мы и будем основывать ее дальнейшее изучение. Соотношение (7.42) позволит нам в дальнейшем пренебречь при больших r последним слагаемым суммы (7.43). Займемся поэтому изучением слагаемых, содержащих величины Z.

По определению случайная величина $Y_i^{(r)}$ измерима относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}_i$. Следовательно, величина $Z_i^{(r)}$ измерима относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}_i \times \mathfrak{A}_{i+1}$. Заметим, что по определению

$$\mathbf{M}\,(Z_i^{(r)} \mid \mathfrak{A}_{i+1}) = 0. \tag{7.44}$$

Поэтому, учитывая свойство обратимости цепи Маркова и само марковское свойство, находим, что

$$\mathbf{M}\,(Z_i^{(r)} \mid \mathfrak{A}_{i+1} \times \mathfrak{A}_{i+2} \times \ldots \times \mathfrak{A}_n) = 0. \tag{7.45}$$

Фиксируем теперь r и рассмотрим отдельно совокупность величин $Z_i^{(r)}$ с четными индексами i (совокупность величин с нечетными индексами исследуется аналогичным образом). Из результатов раздела 3.7 следует, что эта совокупность величин образует цепь Маркова с пространствами состояний $(\Omega_{2k} \times \Omega_{2k+1},\ \mathfrak{A}_{2k} \times \mathfrak{A}_{2k+1})$ и коэффициенты эргодичности этой новой цепи также не превосходят числа $1 - \eta$. Соотношение (7.45) показывает, что если расставить величины $Z_{2k}^{(r)}$ в порядке убывания k, то полученная последовательность величин будет последовательностью мартингал-разностей. Таким образом, для того, чтобы применить к величинам $Z_{2k}^{(r)}$ лемму 10 нужно лишь добиться выполнения условия (7.12).

Предположим в этом абзаце, что сумма дисперсий

$$d_r = \sum_{r \leqslant 2k \leqslant n} \mathbf{D}Z_{2k}^{(n)} = \mathbf{D}\left(\sum_{r \leqslant 2k \leqslant n} Z_{2k}^{(r)}\right) \geqslant \varepsilon. \tag{7.46}$$

Соотношения (7.40) и (7.42) показывают, что всегда $d_r \leqslant 1$. Дисперсия нормированной суммы

$$\sum_{r \leqslant 2k \leqslant n} (d_r)^{-1/2} Z_{2k}^{(r)} \tag{7.47}$$

равна 1, а ее слагаемые не превосходят числа $2\varepsilon^{-1/2}$. Значит, если обозна-

чить через $\widetilde{F}_r(x)$ функцию распределения суммы (7.47), то по лемме 10 для любого $a>0$

$$\int\limits_{|x|\geqslant a} x^2 d\,\widetilde{F}_r(x) \leqslant \Big(2+\frac{2}{a^2}\Big)\Big(\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{a/2}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2}\,dx + 12a^2\varepsilon^{1/8} + \sqrt{4\varepsilon+c^2\eta}\Big). \quad (7.48)$$

Поэтому если обозначить через $F_r(x)$ функцию распределения ненормированной суммы, то снова

$$\int\limits_{|x|\geqslant a} x^2 d\,F_r(x) \leqslant \Big(2+\frac{2}{a^2}\Big)\Big(\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{a/2}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2}\,dx + 12a^2\varepsilon^{1/8} + \sqrt{4\varepsilon+c^2\eta}\Big). \quad (7.49)$$

Заменим теперь неравенство (7.46) на противоположное. Тогда

$$\mathbf{D}\Big(\sum_{r\leqslant 2k\leqslant n} Z_{2k}^{(r)}\Big) \leqslant \varepsilon. \quad (7.50)$$

Сравнивая (7.49) и (7.50), находим, что всегда

$$\int\limits_{|x|\geqslant a} x^2 dF_r(x) \leqslant \Big(2+\frac{2}{a^2}\Big)\Big(\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{a/2}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2}dx + 12a^2\varepsilon^{1/8} + \sqrt{4\varepsilon+c^2\eta}+\varepsilon\Big). \quad (7.51)$$

Аналогичную оценку можно вывести и для сумм

$$\sum_{r\leqslant 2k+1\leqslant n} Z_{2k+1}^{(r)}.$$

Применяя неравенство (5.28) к величинам $Y_i^{(r)}$ и учитывая (7.42), находим, что

$$\mathbf{D}\Big(\sum_{i=r}^{n} Y_i^{(r)}\Big) \leqslant \frac{K}{\sqrt{2}}\Big(\frac{7}{8}\Big)^{r-1}. \quad (7.52)$$

Мы можем теперь, фиксировав какое-нибудь r, применить к сумме $2r+1$ слагаемых

$$S = \sum_{1\leqslant 2k\leqslant n} Z_{2k}^{(1)} + \sum_{1\leqslant 2k+1\leqslant n} Z_{2k+1}^{(1)} + \ldots + \sum_{r\leqslant 2k\leqslant n} Z_{2k}^{(r)} + \\ + \sum_{r\leqslant 2k+1\leqslant n} Z_{2k+1}^{(r)} + \sum_{i=r+1}^{n} Y_i^{(r+1)} \quad (7.53)$$

неравенство (6.9). Учитывая (7.51) и (7.52), имеем

$$\int\limits_{|x|\geqslant a} x^2 dF(x) \leqslant \frac{100r^3}{a^2}\Big(2+\frac{2}{a^2}+\frac{K}{\sqrt{2}}\Big)\Big[\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{a/2}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2}dx + \\ + 12a^2\varepsilon^{1/8} + \sqrt{4\varepsilon+c^2\eta} + \Big(\frac{7}{8}\Big)^{r-1}\Big], \quad (7.54)$$

откуда и следует сразу утверждение леммы.

7.4. Мы можем перейти теперь непосредственно к нашей основной цели — доказательству леммы 9. Предположим выполненными условия этой леммы и примем обозначения, введенные в ее формулировке

Заметим, во-первых, что без ограничения общности можно дополнить требования леммы 9 следующими условиями: при всех достаточно больших n и всех $m < g^{(n)}$ (т. е. для всех m, кроме последнего)

$$\sum_{k=1}^{u_m^{(n)}} \mathbf{D}\,\zeta_{m,k}^{(n)} \geqslant [\psi(n)]^{1/100}. \tag{7.55}$$

В самом деле, этого можно добиться «укрупнением» величин $\pi_m^{(n)}$. Точнее, условие (6.66) показывает, что можно выбрать числа $0 < k_0^{(n)} < k_1^{(n)} < \ldots$ $\ldots < k_{a^{(n)}}^{(n)} \leqslant g^{(n)}$ так, чтобы

$$\sum_{m=k_{l-1}^{(n)}}^{k_l^{(n)}-1} \sum_{k=1}^{u_m^{(n)}} \mathbf{D}\,\zeta_{m,k}^{(n)} \geqslant [\psi(n)]^{1/100}; \quad l = 1, 2, \ldots, a^{(n)}. \tag{7.56}$$

Но суммы (7.56) равномерно по l стремятся к нулю при $n \to \infty$. Положим теперь

$$\tilde{\pi}_l^{(n)} = \sum_{m=k_{l-1}}^{kl\,-1} \pi_m^{(n)}; \quad l = 1, 2, \ldots, a^{(n)}, \tag{7.57}$$

$$\tilde{\pi}_{a^{(n)}+1}^{(n)} = \sum_{m=a^{(n)}}^{g^{(n)}} \pi_m^{(n)}.$$

Очевидно, что после замены $\pi_m^{(n)}$ на $\tilde{\pi}_l^{(n)}$ все условия леммы 9 останутся ненарушенными и, кроме того, будет выполняться условие (7.55).

Положим

$$d_m^{(n)} = \sum_{k=1}^{u_m^{(n)}} \mathbf{D}\zeta_{m,k}^{(n)} \tag{7.58}$$

и

$$\hat{\pi}_m^{(n)} = \sum_{k=1}^{u_m^{(n)}} (d_m^{(n)})^{-1}\zeta_{m,k}^{(n)}. \tag{7.59}$$

Тогда к величинам $\hat{\pi}_m^{(n)}$ применима лемма 11 при $\varepsilon^{(n)} = [\psi(n)]^{1/3}$ и

$$\eta^{(n)} = \left(1 - \frac{f(n)}{2n^{1/3}}\right)^{n^{1/3}}.$$

Как легко видеть, $\eta^{(n)} \to 0$ при $n \to \infty$. Возвращаясь к самим величинам $\pi_m^{(n)}$, находим, что

$$\int\limits_{|x| \geqslant a} x^2 dH_m^{(n)}(x) \leqslant \frac{L}{a^3}[d_m^{(n)}]^2\left(1 + \frac{d_m^{(n)}}{a^2}\right) r^3 \times$$

$$\times \left[\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{a/2(d_m^{(n)})^{-1/2}} x^2 e^{-x^2/2} dx + 12a^2\varepsilon^{1/3} + \sqrt{4\varepsilon + c^2\eta} + \left(\frac{7}{8}\right)^{r-1}\right]. \tag{7.60}$$

Напомним, что целое число r можно выбирать произвольным образом. Будем считать r зависящим только от n и обозначать его $r^{(n)}$. Положим

$$d^{(n)} = \max_m d_m^{(n)}. \tag{7.61}$$

Из (6.66) следует, что $d^{(n)} \to 0$ при $n \to \infty$. Суммируя (7.60) по всем $m < g^{(n)}$ и учитывая (6.65) и (7.55), находим, что

$$\sum_{m=0}^{g^{(n)}-1} \int_{|x|\geqslant a} x^2 dH_m^{(n)}(x) \leqslant \frac{(r^{(n)})^3 L d^{(n)}}{a^2}\left(1+\frac{d^{(n)}}{a^2}\right)\times$$
$$\times\left[\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{a/2(d^{(n)})^{-1/2}}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2}dx + 12a^2\varepsilon^{1/3} + \sqrt{4\varepsilon^{(n)}+c^2\gamma^{(n)}} + \left(\frac{7}{8}\right)^{r-1}\right]. \tag{7.62}$$

Выберем теперь последовательность $r^{(n)}$ так, чтобы при $n \to \infty$

$$r^{(n)}\,[\psi(n)]^{1/2^2} \to 0$$

$$r^{(n)} \int_{a/2(d^{(n)})^{-1/2}}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2}dx \to 0 \tag{7.63}$$

но само $r^{(n)} \to \infty$. Тогда $(r^{(n)})^3\left(\frac{7}{8}\right)^{r^{(n)}-1} \to 0$, и, следовательно, вся правая часть неравенства (7.62) стремится к нулю при $n \to \infty$. Применяя аналогично тому, как мы неоднократно делали, неравенство (5.28) к слагаемым $\zeta_{g^{(n)},k}^{(n)}$, находим из (6.66), что при $n \to \infty$

$$\int_{|x|\geqslant a} x^2 dH_{g^{(n)}}^{(n)}(x) \to 0. \tag{7.64}$$

Таким образом, мы доказали полностью лемму 9 и тем самым завершили доказательство основной теоремы 1.

§ 8. Доказательство теоремы об асимптотической нормальности в случае неограниченных слагаемых

8.1. В этом параграфе будут доказаны теоремы 3—8, сформулированные в разделе 1.6. План изложения следующий. Сначала (раздел 8.2) строится пример ненормального предельного распределения, доказывающий обратное утверждение теоремы 7. На этом примере проще всего разобраться в том новом, что вносит в рассматриваемый вопрос отказ от предположения о равномерной ограниченности слагаемых. Затем (раздел 8.3) доказывается прямое утверждение теоремы 7. Существенно основываясь на результатах, полученных в ходе этого доказательства, мы устанавливаем в разделе 8.4 общий критерий асимптотической нормальности, дающей теоремой 8, а затем (раздел 8.5) выводим в качестве следствий из этого критерия прямые утверждения теорем 3—6. В последнем разделе 8.6 обсуждаются обратные утверждения теорем 5 и 6.

Мы не будем приводить здесь подробно те части доказательств, которые проводятся аналогично доказательствам для случая ограниченных слагаемых, а лишь укажем кратко необходимые изменения, но зато подробно остановимся на частях доказательства, специфических для интересующего нас сейчас случая.

8.2. Итак мы предположим, что выполняются условия второй части теоремы 7. Дадим сначала беглое качественное разъяснение смысла условий (1.35) и (1.35′) и лишь после этого проведем полное построение примера.

Если, по условию, все коэффициенты эргодичности не меньше числа $\alpha^{(n)}$, то свойство почти независимости будет проявляться лишь для слагаемых $X_i^{(n)}$, удаленных друг от друга на расстояние $\gg 1/\alpha^{(n)}$. Наоборот, на участке длины $1/\alpha^{(n)}$ еще не обязаны проявляться эргодические свойства цепи, и ввиду этого распределение суммы слагаемых $X_i^{(n)}$ по такому участку может быть сделано при соответствующем построении «довольно произвольным». В частности, можно добиться, чтобы дисперсия такой суммы была порядка 1. Разобьем весь отрезок времени n на участки длины $[1/\alpha^{(n)}]$ каждый и предположим, что переходные вероятности от моментов $k[1/\alpha^{(n)}]$ к моментам $k[1/\alpha^{(n)}]+1$ выбраны так, чтобы суммы слагаемых $X_i^{(n)}$ по таким участкам были независимы. Тогда, в соответствии со сказанным выше, можно добиться, чтобы дисперсия суммы $S^{(n)}$ имела порядок $n\alpha^{(n)}$ (это согласуется с леммой об оценке дисперсии снизу (см. § 3)). Нормирующий множитель будет иметь при этом порядок $n^{-1/2}(\alpha^{(n)})^{-1/2}$. С другой стороны, каждое слагаемое не превосходит числа $C^{(n)}$, сумма по участку не превосходит $C^{(n)}(\alpha^{(n)})^{-1}$, а нормированная сумма не превосходит числа $C^{(n)}(\alpha^{(n)})^{-3/2}n^{-1/2}$. Условие (1.35′) означает, что это максимальное значение не стремится к нулю. Как известно (см., напр., теорему, сформулированную в ра деле 6.2), для асимптотической нормальности последовательности нормированных сумм независимых величин необходимо, чтобы «асимптотически вся» дисперсия происходила от бесконечно малых значений слагаемых. Однако мы можем распорядиться вероятностью того, что сумма по участку принимает свое максимальное значение так, чтобы часть дисперсии, соответствующая этому уровню, не стремилась ни к нулю, ни к бесконечности, и тогда предельное распределение не будет нормальным. Если выполнено условие (1.35), то развитый метод построения приводит к асимптотически нормальной сумме $S^{(n)}$.

Приступим теперь к точному построению примера. Предположим при этом, что $\alpha^{(n)}\to 0$ при $n\to\infty$. Если это не так, то построение требует некоторых несущественных изменений. Фиксируем в этом абзаце и будем поэтому опускать индекс серии n. Положим $k_i = i[\alpha^{-1}]$ для целых положительных i таких, что $k_i \leqslant n$. Будем строить неоднородную цепь Маркова с 4 состояниями E_1, E_2, E_3, E_4 и n моментами времени. Матрицы вероятностей перехода P_m от m-го момента времени к $(m+1)$-му будет принимать лишь два разных значения $P_m = Q$ при

$m = k_i$ и $P_m = P$ при $m \neq k_i$, где

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2}, & 1-\frac{\alpha}{2}, & 0, & 0 \\ 1-\frac{\alpha}{2}, & \frac{\alpha}{2}, & 0, & 0 \\ \frac{\alpha}{2}, & \frac{\alpha}{2}, & 1-\alpha, & 0 \\ \frac{\alpha}{2}, & \frac{\alpha}{2}, & 0, & 1-\alpha \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1-\varepsilon}{2}, & \frac{1-\varepsilon}{2}, & \frac{\varepsilon}{2}, & \frac{\varepsilon}{2} \\ \frac{1-\varepsilon}{2}, & \frac{1-\varepsilon}{2}, & \frac{\varepsilon}{2}, & \frac{\varepsilon}{2} \\ \frac{1-\varepsilon}{2}, & \frac{1-\varepsilon}{2}, & \frac{\varepsilon}{2}, & \frac{\varepsilon}{2} \\ \frac{1-\varepsilon}{2}, & \frac{1-\varepsilon}{2}, & \frac{\varepsilon}{2}, & \frac{\varepsilon}{2} \end{pmatrix} \tag{8.1}$$

где $\varepsilon = \alpha^2 / C^2$. Из определения коэффициента эргодичности (1.19) следует, что $\alpha(Q) = 1$, $\alpha(P) = \alpha$. В качестве начального распределения вероятностей возьмем вектор $\left(\frac{1-\varepsilon}{2}, \frac{1-\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Случайные величины X_m определим все одинаковым образом, а именно: $X_m(E_1) = 1$, $X_m(E_2) = -1$, $X_m(E_3) = C$, $X_m(E_4) = -C$. Легко видеть, что при всех m математическое ожидание $\mathbf{M}X_m = 0$, а дисперсия $1 \leqslant \mathbf{D}X_m \leqslant 2 + \alpha^2$. Таким образом, выполняются условия теоремы 7.

Из определения матрицы Q следует, что величины $S^{(n)}_{1,k_1}$, $S^{(n)}_{k_1,k_2}$,... являются независимыми. Все они, кроме последней, имеют при фиксированном n общее распределение. Этой последней суммой можно асимптотически пренебречь. Рассмотрим сумму $S^{(n)}_{1,k_1}$. Если в начальный момент времени система находится в E_1 или E_2, то она и не покинет до момента k_1 эту пару состояний, так что дело сводится к случаю двух состояний, рассмотренному в разделе 2.2 и подробно в работе [12]. В частности, как легко показать методами [12] (см. случай B, раздел 2.2), условная дисперсия при этом условии равномерно по n не обращается в 0 и в ∞. С вероятностью $\frac{\varepsilon}{2}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)^{[\alpha^{-1}]} \approx \frac{\varepsilon}{2} e^{-1/2}$ система проведет все время в состоянии E_3 (аналогично и для E_4). Сумма примет при этом значение $C[\alpha^{-1}]$, так что интеграл ее квадрата по этому событию стремится при $n \to \infty$ к $\frac{1}{2} e^{-1/2}$. Промежуточный случай, когда часть времени система проводит в E_3, а затем попадает в E_1 или в E_2, также не меняет дела, и таким образом дисперсия суммы $S^{(n)}_{1,k_1}$ ограничена сверху равномерно по n. Теперь уж легко проверить, что в нашем случае не выполнены необходимые условия асимптотической нормальности для суммы независимых величин (см. раздел 6.2). Расчет проводился по схеме, развитой в первом абзаце этого раздела.

Изучив более полно распределение величин $S^{(n)}_{ki,k_{i+1}}$, легко проверить, что в нашем примере выполняются условия, необходимые для существо-

вания предельного распределения суммы $S^{(n)}$ (см. [8], § 21, теорема 2), и тем самым доказать полностью обратное утверждение теоремы 7.

8.3. Перейдем теперь к доказательству прямого утверждения теоремы 7.

Заметим, во-первых, что по лемме 2 $\mathbf{D}\,S^{(n)} \geqslant k\alpha^{(n)}$, где k — некоторая постоянная. Далее, из условия $\mathbf{D}\,X_1^{(n)} \geqslant c > 0$ следует, что $C^{(n)} \geqslant c^{1/2}$. Поэтому из (1.35) вытекает, что $(\alpha^{(n)})^{-3/2} n^{-1/2} \to 0$, а отсюда следует, что $\alpha^{(n)} n^{1/3} \to \infty$, и, таким образом, условия теоремы 7 уже условий теоремы 2. Поэтому применима лемма 6, сводящая вопрос к изучению сумм независимых величин.

В построение раздела 6.3 нужно внести лишь некоторые несущественные изменения. А именно, всюду, где встречается число C, надо заменить его на $C^{(n)}$. Далее положим

$$g^{(n)} = [C^{(n)} (\alpha^{(n)})^{-5/2} n^{1/2}]^{-1/3}. \tag{8.2}$$

По условию $g^{(n)} \to \infty$ при $n \to \infty$. Оценку (6.14) надо заменить теперь оценкой

$$1 - \left(1 - \frac{\alpha^{(n)}}{2}\right)^{g^{(n)}/\alpha^{(n)}}, \tag{6.14'}$$

а неравенство (6.15) неравенством

$$|\eta_i^k| \leqslant 10 C^{(n)} \left[\frac{g^{(n)}}{\alpha^{(n)}} + 1\right]. \tag{6.15'}$$

Определение (6.17) мы заменим определением

$$r_i = l + i\left[\frac{g^{(n)}}{\alpha^{(n)}} + 1\right]; \quad i = 0, 1, \ldots, t-1; \quad r_t = k, \tag{6.17'}$$

где число t определяется из неравенства $r_{t-1} < k \leqslant r_t + \left[\frac{g^{(n)}}{\alpha^{(n)}} + 1\right]$.

Аналогично, в формуле (6.20), а также во всех вытекающих из нее результатах, надо заменить число $C[n^{1/3} + 1]$ на число $C^{(n)}\left[\frac{g^{(n)}}{\alpha^{(n)}} + 1\right]$. Остается верным и утверждение (6.43), однако оно следует теперь из того, что $r_i - r_{i+1} = \left[\frac{g^{(n)}}{\alpha^{(n)}} + 1\right]$ и $\alpha^{(n)}\left[\frac{g^{(n)}}{\alpha^{(n)}} + 1\right] \to \infty$ при $n \to \infty$. Все остальные рассуждения этого раздела вообще не требуют изменений.

В рассуждения раздела 6.6 нужно внести лишь следующие изменения. Величину (6.63) надо заменить снова на

$$1 - \left(1 - \frac{\alpha^{(n)}}{2}\right)^{g^{(n)}/\alpha^{(n)}}. \tag{6.63'}$$

На новых соображениях основан вывод утверждения (6.60). Теперь он выглядит следующим образом. В соответствии с оценкой дисперсии и результатами раздела 5.10 при всех достаточно больших n и некотором $k > 0$

$$\tilde{\sigma}^{(n)} \geqslant k\sqrt{n\alpha^{(n)}}. \tag{8.3}$$

Поэтому, учитывая свойство B в новой редакции (6.15'), находим, что

$$|\zeta_{m,k}^{(n)}| \leqslant 20 C^{(n)} \left(\frac{g^{(n)}}{\alpha^{(n)}} + 1\right) (\alpha^{(n)})^{-1/2} n^{-1/3}, \tag{8.4}$$

а из условия (1.35) и определения (8.2) следует, что левая часть неравенства (8.4) стремится к нулю при $n \to \infty$.

Таким образом, все сводится снова к лемме 8 с тем только изменением, что условие (6.63) заменено (6.63′). Однако при доказательстве леммы 8, проведенном в § 7, мы пользовались лишь тем, что выражение (6.63) стремится к 1 при $n \to \infty$, а это верно и для (6.63′).

8.4. Мы хотим доказать теперь теорему 8. Заметим прежде всего, что из условия (1.36) следует, что можно построить последовательность $r^{(n)}$ такую, что $r^{(n)} \to 0$ при $n \to \infty$ и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(\alpha^{(n)})^2} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{|t|\geqslant r^{(n)} n^{1/2} (\alpha^{(n)})^{3/2}} t^2 dF_i^{(n)}(t) = 0. \tag{8.5}$$

Далее из условия $\mathbf{D} X_i^{(n)} \geqslant c > 0$ следует, что

$$\int\limits_{|t|\geqslant \frac{\sqrt{c}}{2}} t^2 dF_i^{(n)}(t) \geqslant \frac{3}{4} c. \tag{8.6}$$

Поэтому также и

$$\frac{1}{n(\alpha^{(n)})^2} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{|t|\geqslant \frac{\sqrt{c}}{2}} t^2 dF_i^{(n)} \geqslant \frac{3}{4} c, \tag{8.7}$$

и, значит, из (8.5) следует, что $n^{1/2}(\alpha^{(n)})^{3/2} \to \infty$ при $n \to \infty$. Следовательно, снова выполняются условия теоремы 2, а значит, верна лемма 6, сводящая теорему к проверке выполнения условий Линдеберга (6.6) в случае, когда слагаемыми $\nu_i^{(n)}$ являются величины $(\widetilde{\sigma}^{(n)})^{-1}\widetilde{S}_i^{(n)}$, определенные в лемме 6. Положим

$$C^{(n)} = r^{(n)} n^{1/2} (\alpha^{(n)})^{3/2}. \tag{8.8}$$

Положим, далее,

$$\begin{aligned} Y_i^{(n)} &= X_i^{(n)}, \text{ если } |X_i^{(n)}| \leqslant C^{(n)}, \\ Y_i^{(n)} &= 0, \quad \text{если } |X_i^{(n)}| > C^{(n)}. \end{aligned} \tag{8.9}$$

По определению величины $\widetilde{S}_i^{(n)}$ имеют те же распределения, что и величины $S^{(n)}_{l_i^{(n)}, k_{i+1}^{(n)}}$. Величину $S^{(n)}_{l_i^{(n)}, k_{i+1}^{(n)}}$ мы представим в виде суммы трех слагаемых, чтобы применить затем, как мы это делали неоднократно, лемму 7. Фиксируем i и n и положим

$$\begin{aligned} t_m &= l_i^{(n)} + 10m\,[(\alpha^{(n)})^{-1} + 1]; \quad m = 0, 1, \ldots, p-1, \\ t_p &= k_{i+1}^{(n)} \end{aligned} \tag{8.10}$$

где число p определяется из неравенства

$$t_{p-1} < k_{i+1}^{(n)} \leqslant t_{p-1} + 10m\,[(\alpha^{(n)})^{-1} + 1].$$

Положим далее

$$
{}_1\widetilde{S}_i^{(n)} = \frac{1}{\widetilde{\sigma}^{(n)}} \sum_{2q<p} \sum_{\alpha=t_{2q}+1}^{t_{2q+1}} Z_\alpha^{(n)},
$$

$$
{}_2\widetilde{S}_i^{(n)} = \frac{1}{\widetilde{\sigma}^{(n)}} \sum_{2q+1<p} \sum_{\alpha=t_{2q+1}+1}^{t_{2q+2}} Z_\alpha^{(n)}, \tag{8.11}
$$

$$
{}_3\widetilde{S}_i^{(n)} = \frac{1}{\widetilde{\sigma}^{(n)}} \sum_{\alpha=l_i^{(n)}+1}^{k_{i+1}} Y_\alpha^{(n)},
$$

т. е. ${}_1\widetilde{S}_i^{(n)}$ — сумма величин $Z_\alpha^{(n)}/\widetilde{\sigma}^{(n)}$ по отрезкам $[t_p+1,\ t_{p+1}]$ с четными p, а ${}_2\widetilde{S}_i^{(n)}$ — по отрезкам с нечетными p.

Очевидно, что

$$
\frac{1}{\widetilde{\sigma}^{(n)}} \widetilde{S}_{l_i^{(n)},\, k_{i+1}^{(n)}} = {}_1\widetilde{S}_i^{(n)} + {}_2\widetilde{S}_i^{(n)} + {}_3\widetilde{S}_i^{(n)}, \tag{8.12}
$$

и поэтому лемма 7 позволяет изучать отдельно слагаемые с индексами 1, 2 и 3.

По определению $|Y^{(n)}| \leqslant C^{(n)}$, причем из (8.8) следует, что для последовательности $C^{(n)}$ выполняется условие (1.35). Поэтому изучение величин ${}_3\widetilde{S}_i^{(n)}$ проводится точно так же, как в разделе 8.3.

Величины ${}_1\widetilde{S}_i^{(n)}$ и ${}_2\widetilde{S}_i^{(n)}$ устроены аналогичным образом, так что мы будем изучать лишь первую из этих сумм. Очевидно, что при фиксировании i и n

$$
{}_1\widetilde{S}_i^{(n)} = \sum_{2q<p} \hat{S}_q, \tag{8.13}
$$

где

$$
\hat{S}_q = \sum_{\alpha=t_{2q}+1}^{t_{2q+1}} Z_\alpha^{(n)}. \tag{8.14}
$$

Далее, из леммы 2 об оценке дисперсии и результатов раздела 5.10 следует, что при достаточно больших n и некотором $k>0$

$$
\widetilde{\sigma}^{(n)} \geqslant k\,(n\alpha^{(n)})^{1/2}. \tag{8.15}
$$

По определению

$$
\mathbf{M}\,(Z_i^{(n)})^2 = \int\limits_{|t|\geqslant C^{(n)}} t^2 dF_i^{(n)}(t). \tag{8.16}
$$

Используя общее неравенство, для любых случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_m$

$$
\mathbf{M}\,(\xi_1 + \ldots + \xi_m)^2 \leqslant m\,(\mathbf{M}\,\xi_1^2 + \mathbf{M}\,\xi_2^2 + \ldots + \mathbf{M}\,\xi_m^2)
$$

и (8.16), видим, что

$$
\mathbf{M}\,\hat{S}_q^2 \leqslant \frac{2k}{n\,(\alpha^{(n)})^2} \sum_{\alpha=t_{2q}+1}^{t_{2q+1}} \int\limits_{|t|\geqslant C^{(n)}} t^2 dF_\alpha^{(n)}(t). \tag{8.17}
$$

Далее, аналогично тому, как мы это неоднократно делали, находим, что

величины $\hat{S}_q$ связаны в цепь Маркова, причем ее коэффициенты эргодичности не меньше числа

$$(1-\alpha^{(n)})^{2/\alpha^{(n)}} \geqslant 1/2.$$

Поэтому, применяя результаты раздела 5.8, находим, что при некоторой константе $L>0$

$$\mathrm{M}\,({}_1\widetilde{S}_i^{(n)})^2 \leqslant L \sum_{2q<p} \mathrm{M}\hat{S}_q^2 \leqslant \frac{2kL}{n\,(\alpha^{(n)})^2} \sum_{\alpha=l_i^{(n)}+1}^{k_{i+1}^{(n)}} \int\limits_{|t|\geqslant C^{(n)}} t^2 dF_\alpha^{(n)}(t). \qquad (8.18)$$

Наконец, суммируя по i и используя основное условие (8.5), получаем искомое условие Линдеберга, а значит, и утверждение теоремы 8.

8.5. Прямое утверждение теоремы 7 и теоремы 4 следуют из теоремы 8 очевидным образом. Как мы уже отметили во вводном разделе, теорема 3 является следствием теоремы 5. Займемся поэтому выводом теоремы 5.

Заметим, во-первых, что при $0<\beta<1/3$ величина m, определяемая соотношением (1.30), больше 2, так что из (1.31) вытекает, что при некотором $C<\infty$ дисперсия $\mathrm{D}X_i^{(n)} \leqslant C$. Поэтому для того, чтобы доказать первое утверждение теоремы 5, достаточно проверить выполнение в условиях этой теоремы утверждения (1.36).

Заметим для этого, что при всех i и n и любом $L>0$

$$L^{m-2} \int\limits_{|t|\geqslant L} t^2\, dF_i^{(n)}(t) \leqslant \int\limits_{|t|\geqslant L} t^m\, dF_i^{(n)}(t) \leqslant \gamma_m. \qquad (8.19)$$

Отсюда, положив $L = rn^{1/2}(\alpha^{(n)})^{3/2}$, находим, что величина, стоящая под знаком предела в (1.36), не превосходит числа

$$\gamma_m [rn^{1/2}(\alpha^{(n)})^{3/2}]^{2-m} (\alpha^{(n)})^{-2}. \qquad (8.20)$$

Учитывая (1.29) и (1.30), находим, что величина (8.20) стремится к нулю, что и требовалось доказать.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 6. Как нетрудно проверить, при $x\to\infty$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty t^2\, e^{-t^2/2}\, dt \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-x^2/2}. \qquad (8.21)$$

Поэтому в условиях теоремы 6 существует постоянная $L<\infty$ такая, что для всех достаточно больших x

$$\int\limits_{|t|\geqslant x} t^2\, dF_i^{(n)}(t) \leqslant Lxe^{-x^2/2}. \qquad (8.22)$$

Из соотношения (8.22) следует, что выражение, стоящее под знаком предела в (1.36), не превосходит числа

$$\frac{Lrn^{1/2}}{(\alpha^{(n)})^{1/2}} e^{-\frac{r^2}{2} n(\alpha^{(n)})^3}, \qquad (8.23)$$

а из (1.33) вытекает, что это выражение стремится к нулю при $n\to\infty$, что и требовалось доказать.

8.6. Построение примеров, доказывающих обратные утверждения теорем 5 и 6, проводится по тому же плану, что и построение соответ-

ствующего примера к теореме 7 (раздел 8.2). Поэтому мы ограничимся здесь лишь несколькими дополнительными замечаниями.

При построении примера к теореме 6 мы положим $\alpha^{(n)} = n^{1/3} \ln \ln n$. Множество состояний системы состоит из двух особых состояний E_1 и E_2 и двух полупрямых $(n^{1/2}(\alpha^{(n)})^{3/2}, \infty)$ и $(-\infty, -n^{1/2}(\alpha^{(n)})^{3/2})$ (заменяющих состояния E_3 и E_4 раздела 8.2). Случайные величины $X_i^{(n)}$ определяются следующим образом $X_i^{(n)}(E_1) = 1$, $X_i^{(n)}(E_2) = -1$, $X_i^{(n)}(t) = t$, если t лежит на одной из полупрямых. Вероятности перехода «внутри участков» определяются вполне аналогично тому, как в разделе 8.2 была определена матрица P. Распределение вероятностей для состояния системы в начальный момент времени каждого из участков (аналог матрицы Q) определяется так, чтобы вероятности находиться на полупрямых задавались плотностями вероятностей

$$p(t) = \frac{|t|^{-m-1}}{\ln |t|}. \tag{8.24}$$

Оценки проводятся аналогично тому, как это делалось в разделах 8.2 и 8.5.

При построении примера к теореме 7 нельзя вводить дискретные состояния E_1 и E_2, так как от этого нарушилась бы нормальность распределений слагаемых. Поэтому в качестве совокупности состояний системы надо взять действительную прямую $-\infty < t < \infty$ и положить $X_i^{(n)}(t) = t$. Распределение вероятностей подбирается так, чтобы все величины $X_i^{(n)}$ имели нормальное распределение со средним 0 и дисперсией 1. Положим, как и раньше, $C^{(n)} = n^{1/2}(\alpha^{(n)})^{3/2}$. Перемещение системы внутри участка происходит следующим образом: для любого начального состояния t_0 с плотностью вероятности $\frac{\alpha^{(n)}}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ система попадает за один шаг в состояние t. С вероятностью $1 - \alpha^{(n)}$ система остается в состоянии t_0, если $|t_0| \geqslant C^{(n)}$, и переходит в состояние $-t_0$, если $|t_0| < C^{(n)}$. Оценки дисперсии будут в этом случае несколько сложнее, чем в разделе 8.2.

§ 9. Дополнительные обобщения теоремы 1 об асимптотической нормальности

9.1. В этом параграфе доказываются теоремы 9 и 10 и строится пример, подчеркивающий естественность условия (1.37) теоремы 9. Начнем с этого примера.

Будем строить цепь из двух состояний E_1 и E_2, причем $X_i^{(n)}(E_1) = 1$, $X_i^{(n)}(E_2) = -1$. Безусловные вероятности находиться в состояниях E_1 и E_2 в любой момент времени равны $1/2$. Матрицы вероятностей перехода $P_k^{(n)}$ определяются следующим образом:

$$P_{2i+1}^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{2i}^{(n)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \tag{9.1}$$

где i — целое число. Тогда $\alpha_{2i+1}^{(n)} = 0$, $\alpha_{2i}^{(n)} = 1$, а сумма $S^{(n)} = 0$ при четном n и $S^{(n)} = X_n^{(n)}$ при нечетном n, так что центральная предельная теорема не выполнена. Этот пример показывает, что не случайно в условие (1. 37) входят минимумы из пар величин $\alpha_i^{(n)}$ и $\alpha_{i+1}^{(n)}$.

9.2. Теорема 9 доказывается вполне аналогично теореме 1. Укажем лишь на те места в доказательстве теоремы 1, где существенно используется равномерное необращение в нуль величин $\alpha_i^{(n)}$, и укажем, почему в этих местах можно обойтись более слабыми условиями (1.37) и (1.38).

Прежде всего, снова имеет место оценка дисперсии, даваемая леммой 2. В самом деле, в обозначениях § 4, из леммы 4′ следует, что $\overline{D}_k \geqslant \overline{D}_{k-2} + \frac{1}{4}(\alpha_{k-1}\widetilde{D}_{k-1} + \alpha_{k-2}\widetilde{D}_{k-2})$. По лемме 5 $\min(\widetilde{D}_{k-1}, \widetilde{D}_k) \geqslant \frac{1}{4}c$ и, следовательно, $\overline{D}_k \geqslant \overline{D}_{k-2} + \frac{c}{16}\min(\alpha_{k-1}, \alpha_{k-2})$, и поэтому из (1.37) вытекает нужная нам оценка дисперсии снизу.

Условие (1.38) позволяет получить оценку, аналогичную оценке (5.37) для коэффициента эргодичности $\alpha_{kl}^{(n)}$ (где $l - k \geqslant n^{1/3}$), показывающую, что $\alpha_{kl}^{(n)} \to 1$ при $n \to \infty$ равномерно по k и l, а только этот факт используется в § 5.

Наконец, еще раз употребляется условие на $\alpha^{(n)}$ в разделе 6.3. Однако используемое там условие (6.45) совпадает с нашим условием (1.38).

9.3. Условие (1.6) теоремы 1, которое отсутствует в теореме 10, использовалось лишь в оценках дисперсии снизу § 4, а именно в доказательстве леммы 5. Однако, просмотрев это доказательство, легко убедиться, что из него следует, что всегда $\min(\widetilde{D}_{k-1}, \widetilde{D}_k) \geqslant \frac{1}{4}\mathbf{D}X_k^{(n)}$. Поэтому из леммы 4 следует, что

$$\mathbf{D}S^{(n)} \geqslant \frac{\alpha^{(n)}}{100}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{D}X_i^{(n)}. \tag{9.2}$$

Условие (1.39) показывает, следовательно, что

$$n^{-2/3}\mathbf{D}S^{(n)} \to \infty \tag{9.3}$$

при $n \to \infty$, а это и есть та оценка дисперсии снизу, которая нужна нам для дальнейшего.

§ 10. Случай последовательности величин, связанных в цепь Маркова

10.1. Построим пример цепи Маркова из двух состояний, для которой $\alpha^{(n)} \sim n^{-1/3}$, но величина $S_{0,\,n}$ — число попаданий в состояние E_1 не имеет предельного распределения. Можно построить пример, в котором $\alpha^{(n)} \sim n^{-1/3}$ и величина $S_{0,\,n}$ имеет предельное распределение, не являющееся нормальным, однако мы не будем приводить здесь этого примера, так как его построение более сложно.

Общий план построения тот же, что и для случая схемы серий, рассмотренного в § 2. Так, мы снова будем делить всю ось времени на участки, каждый из которых имеет длину порядка $(\alpha^{(n)})^{-1}$. А именно, определим последовательность целых чисел x_n при помощи рекуррентного соотношения

$$x_{n+1} = x_n + [(x_n)^{1/3}]; \quad n = 1, 2, \ldots; \quad x_0 = 1. \tag{10.1}$$

Для нас будет очень важным следующее простое свойство этого соотношения: если определить число $m(a)$ из условия $x_{m(a)} \leqslant a \leqslant x_{m(a)+1}$, то при некотором $0 < c < \infty$

$$m(a) \sim ca^{3/4}. \tag{10.2}$$

Этот факт становится ясным с наглядной точки зрения, если сравнить разностное уравнение (10.1) с соответствующим дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dn} = x^{1/3}. \tag{10.3}$$

Он может быть доказан при помощи простых оценок. Определим теперь следующим образом матрицы переходных вероятностей

$$P_i = \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} & \text{при } i = x_n;\ n = 0, 1, 2, \ldots, \\ \begin{pmatrix} 1 - i^{-1/3}, & i^{-1/3} \\ i^{-1/3}, & 1 - i^{-1/3} \end{pmatrix} & \text{при } x_m < i < x_{m+1};\ m = 2^{2^k};\ k = 0, 1, \ldots \\ \begin{pmatrix} i^{-1/3}, & 1 - i^{-1/3} \\ 1 - i^{-1/3}, & i^{-1/3} \end{pmatrix} & \text{при остальных } i. \end{cases} \tag{10.4}$$

В начальный момент с вероятностью $\frac{1}{2}$ находимся в E_1 с вероятностью $\frac{1}{2}$ в E_2. Тогда при всех n математическое ожидание $\mathbf{M}S_{0,\,n} = 0$.

Здесь так же, как и в примере § 2, величины $S_{x_i,\,x_{i+1}}$ являются взаимно независимыми при различных i. Из результатов раздела 2.2 следует, что при $i \to \infty$, $i \neq 2^{2^k}$ дисперсия $\mathbf{D}S_{x_i,\,x_{i+1}} \to d < \infty$. Поэтому из соотношения (10.2) следует, что

$$\sum_{x_i \leqslant n,\ i \neq 2^{2^k}} \mathbf{D}S_{x_i,\,x_{i+1}} \sim \sigma n^{-3/3}, \tag{10.5}$$

где σ — некоторая ненулевая константа С другой стороны, из результатов раздела 2.2 следует, что при $i = 2^{2^k}$ и $k \to \infty$ дисперсия $\mathbf{D}S_{x_i,\,x_{i+1}} \sim \tilde{d}\,(x_i)^{2/3}$. Так как последовательность $i_k = 2^{2^k}$ является очень редкой, нетрудно показать, что учет особых слагаемых не меняет оценку (10.5), т. е. при $x \to \infty$

$$\mathbf{D}S_{0,\,x_i} \sim \sigma\,(x_i)^{2/3}. \tag{10.6}$$

Заметим теперь, что при $i = 2^{2^k}$ изучаемая величина $S_{0,\,x_{i+1}} = S_{0,\,x_i} + S_{x_i,\,x_{i+1}}$, причем слагаемые этой суммы независимы и имеют одинаковый порядок. Точнее, после умножения на нормировочный множитель $(x_i)^{-1/3}$ мы получим, в соответствии с (2.3), что последовательность нормированных величин $(x_i)^{-1/3} S_{x_i,\,x_{i+1}}$ сходится к собственному распределению, не являющемуся нормальным. Отсюда уже следует сразу, что сумма $S_{0,\,x_{i+1}}$ не может при $i = 2^{2^m}$, $m \to \infty$ иметь предельное нормальное распределение. Мы показали тем самым, что наш пример обладает интересующим нас свойством.

10.2. В конце книги Романовского [27] сформулировано необходимое и достаточное условие выполнимости центральной предельной теоремы для рассматриваемой в этом параграфе схемы последовательности. Для случая двух состояний и $S_{0,\,n}$, равного числу попаданий в состояние E_1, условие Романовского сводится к условию $\mathbf{D}S_{0,\,n} \to \infty$ при $n \to \infty$. Как легко видеть, разобранный только что пример, так же как и результат Широкорада [35], показывает, что это условие не является достаточным.

§ 11. Критерий эргодичности неоднородной цепи Маркова

В этом параграфе доказывается теорема 11, сформулированная в разделе 1.9.

Положим $\alpha_{kl} = \alpha(P_{kl})$. Тогда $\alpha_{k,\,k+1} = \alpha_k$. Заметим, во-первых, что в соответствии с определением (1.5) для того, чтобы заданная цепь Маркова была эргодической в смысле (1.41), достаточно, чтобы при любом k

$$\lim_{l\to\infty} \alpha_{kl} = 1. \tag{11.1}$$

Из соотношения (3.11), доказанного в разделе 3.4, следует, что при любых k и l

$$1 - \alpha_{kl} \leqslant \prod_{i=k}^{l-1} (1 - \alpha_k) \tag{11.2}$$

и поэтому для выполнения (11.1) достаточно, чтобы

$$\sum_{i=k}^{\infty} \alpha_i = \infty. \tag{11.3}$$

Однако это будет так, если последовательность матриц включает в себя некоторую другую последовательность матриц, для которой выполнено (1.42). Тем самым доказана достаточность условной теоремы 11.

Доказательство необходимости ее условий чуть-чуть труднее. Предположим, что задана последовательность переходных функций P_i, для которой

$$\sum_{i=k}^{\infty} \alpha_i < \infty. \tag{11.4}$$

Тогда для всех i, начиная с некоторого i_0, $\alpha_i < 1$ и, следовательно,

$$\prod_{i=i_0}^{\infty} (1 - \alpha_i) > 0. \tag{11.5}$$

Выберем такую последовательность $\bar{\alpha}_i$, чтобы при всех i, $\bar{\alpha}_i > \alpha_i$, но все же

$$\prod_{i=i_0}^{\infty} (1 - \bar{\alpha}_i) > 0. \tag{11.5'}$$

Последовательность переходных функций $\widetilde{P}_i$, включающую в себя последовательность P_i и не являющуюся эргодической, мы будем строить следующим образом: положим, во-первых,

$$\widetilde{P}_i = P_i, \quad i < i_0. \tag{11.6}$$

Заметим, что, в соответствии с определением эргодической цепи (1.41) и свойством нормы (1.10'), достаточно построить последовательность $\widetilde{P}_i$ такую, что для некоторых двух элементов $x \in \Omega$ и $y \in \Omega$ при $\lambda(A) = \delta_x(A) - \delta_y(A)$, $A \in \mathfrak{A}$ (обозначения введены в разделе 1.4)

$$\lim_{l\to\infty} \| \widetilde{P}_{i_0,l}\ \lambda \| > 0. \tag{11.7}$$

Каждой из переходных вероятностей функций P_i мы сопоставим пару состояний x_i, y_i такую, что при $\lambda_i(A) = \delta_{x_i}(A) - \delta_{y_i}(A)$

$$\|P_i \lambda_i\| \geqslant 1 - \bar{\alpha}_i. \tag{11.8}$$

Возможность так выбрать точки x_i, y_i следует из (1.5') и условия $\bar{\alpha}_i > \alpha_i$. В качестве начальной меры в момент i_0 возьмем $\lambda(A) = \lambda_{i_0}(A)$. Будем теперь строить последовательность переходных вероятностей $\widetilde{P}_i$, $\widetilde{P}_{i_0+1}, \ldots$, причем положим сразу

$$\widetilde{P}_{i_0+2k(i-i_0)} = P_{i_0+k(i-i_0)}, \tag{11.9}$$

а остальные переходные вероятности будем определять при помощи некоторого рекуррентного процесса. А именно, пусть уже определены переходные вероятности $\widetilde{P}_{i_0}$, $\widetilde{P}_{i_0+1}, \ldots, \widetilde{P}_{i_0+m-1}$ (m — нечетное число). Пусть множества $M \in \mathfrak{A}$, $N \in \mathfrak{A}$ образуют разложение в смысле Хана (см. раздел 3.1) пространства Ω для меры $\widetilde{P}_{i_0, i_0+m}\lambda$. Положим

$$\begin{aligned} \widetilde{P}_{i_0+m}(\omega, A) &= \delta_{x_{i_0+\frac{m+1}{2}}}(A) \quad \text{при } \omega \in M, \\ \widetilde{P}_{i_0+m}(\omega, A) &= \delta_{y_{i_0+\frac{m+1}{2}}}(A) \quad \text{при } \omega \in N. \end{aligned} \tag{11.10}$$

По построению эта последовательность $\widetilde{P}_i$ включает в себя последовательность P_i. Покажем, что для нее верно (11.7). Для этого заметим, что из (11.10) и определения разложения в смысле Хана следует сразу, что при четном k

$$\|\widetilde{P}_{i_0, i_0+k-1}\lambda\| = \|\widetilde{P}_{i_0, i_0+k}\lambda\|. \tag{11.11}$$

С другой стороны, при четном k мера $\lambda(A)$ сосредоточена в двух точках $x_{k/2}$ и $y_{k/2}$, так что

$$\widetilde{P}_{i_0, i_0+k}\lambda = \|\widetilde{P}_{i_0, i_0+k}\|\lambda_{k/2}. \tag{11.12}$$

(Здесь умножение числа на меру понимается как обычное умножение числа на функцию). Так как $\widetilde{P}_{i_0+k} = P_{k/2+i_0}$, то из (11.8) следует, что

$$\begin{aligned} \|\widetilde{P}_{i_0, i_0+k+1}\lambda\| &= \|\widetilde{P}_{i_0, i_0+k}\lambda\|\|P_{i_0+k/2}\lambda_{i_0+k/2}\| \geqslant \\ &\geqslant \|\widetilde{P}_{i_0, i_0+k}\lambda\|(1 - \bar{\alpha}_{i_0+k/2}) \end{aligned} \tag{11.13}$$

и из (11.13) и (11.11) следует, что

$$\lim_{l\to\infty}\|\widetilde{P}_{i_0 l}\lambda\| \geqslant \prod_{k=i_0}^{\infty}(1 - \bar{\alpha}_k), \tag{11.14}$$

а из (11.5) следует искомое соотношение (11.7). Теорема 11 доказана.

Поступила в редакцию
15. 9. 56

CENTRAL LIMIT THEOREM FOR NON-STATIONARY MARKOV CHAINS. II.

R. L. DOBRUSHIN (MOSCOW)

(Summary)

The second part of this paper contains proofs of results published in the first part (see the first number of this journal).

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том I И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 4*
1956

ДВЕ РАВНОМЕРНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛАГАЕМЫХ

А. Н. КОЛМОГОРОВ

Во всем дальнейшем

$$\Phi(x) = \mathbf{P}(\xi < x),\ F_k(x) = \mathbf{P}(\xi_k < x),$$

где

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n,$$

и случайные величины ξ_k взаимно независимы. Через $\mathfrak{E}$ обозначается совокупность вырожденных распределений вида

$$E(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant a \\ 1 \text{ при } x > a, \end{cases}$$

а через Θ—совокупность неограниченно делимых распределений. Целью работы является доказательство следующих двух теорем:

Теорема 1. *Существует такая константа C, что из*

$$E_k(x-l) - \varepsilon \leqslant F_k(x) \leqslant E_k(x+l) + \varepsilon,$$

где $E_k \in \mathfrak{E}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ при любых $\varepsilon > 0$, $L > 2l > 0$ и

$$\delta = C \max\left(\frac{L}{l}\sqrt{\log\frac{L}{l}},\ \varepsilon^{1/5}\right)$$

вытекает существование $\Psi \in \Theta$, для которого

$$\Psi(x-L) - \delta \leqslant \Phi(x) \leqslant \Psi(x+L) + \delta.$$

Теорема 2. *Существует такая константа C, что в случае одинаково распределенных слагаемых ξ_k с произвольным распределением $F_k(x) = F(x)$ существует $\Psi \in \Theta$, для которого при всех x*

$$|\Psi(x) - \Phi(x)| \leqslant Cn^{-1/5}.$$

Доказательство обоих теорем использует ряд идей, заимствованных из работ П. Леви (см. [1] § 48), В. Деблина [2] и Ю. В. Прохорова [3] и основано на следующих леммах, в которых

$$G_{a,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx,\quad G_\sigma = G_{0,\sigma},$$

$Q_F(l) = \sup_x [F(x+l+0) - F(x)]$ есть введенная П. Леви «функция концентрации» распределения $F(x)$, а $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C'$— абсолютные константы.

Лемма 1. *Если*

$$R \geqslant r, \quad R^2 \geqslant r^2 \log s,$$

где *

$$s = \sum_k [1 - Q_{F_k}(r)],$$

то

$$Q_\Phi(R) \leqslant \frac{C_1 R}{r \sqrt{s}}.$$

Лемма 2.

$$|F * G_{a,\sigma} - F| \leqslant C_2 Q_F(\sigma).$$

Лемма 3.

$$|G_{a,s} - G_{a,\sigma}| \leqslant C_3 \frac{s^2 - \sigma^2}{\sigma^2}.$$

Лемма 4. *Если*

$$\eta = C_4 e^{-\frac{l^2}{2\sigma^2}},$$

то

$$F * G_{0,\sigma}(x - l) - \eta \leqslant F(x) \leqslant F * G_{0,\sigma}(x + l) + \eta.$$

Лемма 5. *Пусть*

$$p_{m_1 \ldots m_n} = \prod_k p^k_{m_k}, \quad q_{m_1 \ldots m_n} = \prod_k q^k_{m_k},$$

где

$$p^k_m = \begin{cases} 1 - p_k & \text{при } m = 0 \\ p_k & \text{при } m = 1 \\ 0 & \text{при } m > 1 \end{cases}, \quad q^{(k)}_m = \frac{p^m_k}{m!} l^{-p_k}, \quad m = 0, 1, \ldots$$

В предположении $0 \leqslant p_k \leqslant 1$ *справедливо неравенство* **

$$\sum_{m_1 \ldots m_n} |p_{m_1 \ldots m_n} - q_{m_1 \ldots m_n}| \leqslant C_5 \sum_k p_k^2.$$

Лемма 6. *Если* $0 \leqslant p \leqslant 1$, *то*

$$\sum_{m=0}^{n} \left| C_n^m p^m (1-p)^{n-m} - \frac{(np)^m}{m!} e^{-np} \right| \leqslant C_6 p.$$

Лемма 7. *Пусть*

$$a_k = \mathbf{M}\xi_k, \quad \sigma_k^2 = \mathbf{D}^2 \xi_k,$$

$$a = \sum_k a_k, \quad \sigma^2 = \sum_k \sigma_k^2, \quad \sigma_*^2 = \sigma^2 + \sigma_0^2.$$

---

* Всюду далее в суммах $\sum_k$ и произведениях $\prod_k$ или $\prod^*_k$ индекс k пробегает все целые значения в пределах $1 \leqslant k \leqslant n$.

** Здесь и всюду далее $\sum_{m_1 \ldots m_n}$ обозначает суммирование по всем наборам положительных целых $m_1, \ldots, m_n$.

Из

$$|\xi_k| \leqslant l, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

вытекает, что при всех x

$$|\Phi * G_{a,\sigma_0}(x) - G_{a,\sigma_*}(x)| \leqslant C_7 \frac{l}{\sigma_*}.$$

Доказательство леммы 1 будет опубликовано в другом месте. Леммы 2—5 вполне элементарны и их доказательство может быть предоставлено читателю. Лемма 6 принадлежит Ю. В. Прохорову (см. [3]). Лемма 7 легко получается из известной оценки

$$|\Phi(x) - G_{a,\sigma}(x)| \leqslant C' \frac{\Sigma \mathbf{M} |\xi_k - a_k|^2}{\sigma^{3/2}},$$

если дополнительное нормальное слагаемое с дисперсией σ_0^2 представить в виде суммы нескольких нормальных же слагаемых с достаточно малой дисперсией каждое.

1. Доказательство теоремы 1, общая часть. Достаточно доказать теорему для случая непрерывных и строго возрастающих функций $F_k(x)$. В самом деле, предположим, что F_k, ε, l и L фиксированы так, что условия теоремы выполнены. Выберем l' и L' подчиненными неравенствам

$$L > L' > 2l' > 2l$$

и положим $\varepsilon' = 2\varepsilon$. Легко установить, используя лишь качественное содержание леммы 4, что при достаточно малом s распределения

$$F_k' = F_k * G_s$$

удовлетворяют условиям теоремы при замене ε, l, L на ε', l', L'. Функции $F_k'(x)$, как легко доказать, непрерывны и строго возрастают. Если для соответствующей функции

$$\Phi' = \Phi * G_{s\sqrt{n}}$$

будет доказано неравенство

$$\Psi(x - L') - \delta' \leqslant \Phi(x) \leqslant \Psi(x + L') + \delta',$$

где

$$\delta' = C \max\left(\frac{L'}{l'}\sqrt{\log \frac{L'}{l'}},\ \varepsilon^{n/4}\right),$$

то, применяя лемму 4 с $\sigma^2 = ns^2$ и $l = L - L'$, легко обнаружить, что при достаточно малом s и $C = 2C'$ первоначальная функция $\Phi(x)$ удовлетворяет неравенству, являющемуся заключением теоремы.

Будем в соответствии со сказанным считать функции $y = F_k(x)$ непрерывными и строго возрастающими, что позволяет считать обратные функции $x = F^{-1}(y)$ однозначно определенными для всех y из интервала $0 < y < 1$ непрерывными, строго возрастающими и пробегающими все действительные значения x.

Положим

$$\lambda_k(P) = F_k^{-1}(1 - P) - F_k^{-1}(P).$$

Функции $\lambda_k(P)$ будут в сделанных предположениях непрерывными и строго убывающими. Они пробегают все положительные значения λ,

$0<\lambda<\infty$, когда P пробегает интервал $0<P<\frac{1}{2}$. Обратные функции

$$\varepsilon_k(\lambda) = \lambda_k^{-1}(\lambda)$$

тоже непрерывны и строго убывают: когда λ меняется в пределах $0<\lambda<\infty$, они пробегают значения P, заполняющие интервал $\frac{1}{2}<P<1$. Поэтому, если только

$$\sum_k \varepsilon_k(2l) > 2\varepsilon^{-1/8},$$

(здесь l и ε — величины, входящие в условие теоремы, причем мы будем далее считать $\varepsilon \leqslant 1$, что, конечно, не нарушает общности), то уравнение

$$\sum_k \varepsilon_k(\lambda_0) = 2\varepsilon^{-1/8}$$

имеет единственное решение

$$\lambda_0 > 2l.$$

Определим теперь величины Λ и σ_0 следующим образом:

А) *Если*

$$\sum_k \varepsilon_k(2l) > 2\varepsilon^{-1/8}, \tag{А.1}$$

то

$$\Lambda = \lambda_0, \quad \sigma_0 = 2\varepsilon^{-1/8}\Lambda; \tag{А.2}$$

Б) *Если*

$$\sum_k \varepsilon_k(2l) \leqslant 2\varepsilon^{-1/8}, \tag{Б.1}$$

то

$$\Lambda = 2l, \quad \sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} L\left(\log \frac{L}{l}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{Б.2}$$

Чтобы определить нужное нам неограниченно делимое распределение Ψ, положим

$$\varepsilon_k = \varepsilon_k(\Lambda)$$

и введем случайные величины

$$\mu_k = \begin{cases} 0, \text{ если } F_k^{-1}(\varepsilon_k) < \xi_k < F_k^{-1}(1-\varepsilon_k), \\ 1 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Положим далее

$$a_k = \mathbf{M}(\xi_k \mid \mu_k = 0),$$
$$\sigma_k^2 = \mathbf{D}(\xi_k \mid \mu_k = 0),$$

$$a \parallel \sum_k (1-2\varepsilon_k) a_k, \quad \sigma^2 = \sum_k (1-2\varepsilon_k)\sigma_k^2,$$

$$F_k^{(0)}(x) = \mathbf{P}(\xi_k < x \mid \mu_k = 0),$$

$$F_k^{(1)}(x) = \mathbf{P}(\xi_k < x \mid \mu_k = 1).$$

Легко видеть, что

$$\Phi = \prod_k [2\varepsilon_k F_k^{(1)} + (1-2\varepsilon_k) F_k^{(0)}] = M \prod_k [\mu_k F_k^{(1)} + (1-\mu_k) F_k^{(0)}] =$$

$$= \sum_{m_1 \ldots m_n} p_{m_1 \ldots m_n} \prod_k [F_k^{(1)}]^{m_k} * \prod_k [F_k^{(0)}]^{1-m_k},$$

где вероятности

$$p_{m_1 \ldots m_n} = \mathbf{P}(\mu_1 = m_1, \ldots, \mu_n = m_n)$$

выражаются формулами из леммы 5, если положить

$$p_k = 2\varepsilon_k$$

Определив теперь через $p_k = 2\varepsilon_k$ величины $q_{m_1 \ldots m_n}$ формулами из той же леммы 5, положим

$$\Psi = \left[\exp \sum_k 2\varepsilon_k (F_k^{(1)} - E_0)\right] * G_{a,\sigma} = \sum_{m_1 \ldots m_n} q_{m_1 \ldots m_n} \prod_k [F_k^{(1)}]^{m_k} * G_{a,\sigma_*},$$

где

$$\sigma_*^2 = \sigma^2 + \sigma_0^2.$$

В приведенных формулах для Φ и Ψ через E_0 обозначено единичное распределение

$$E_0(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 0, \\ 1 \text{ при } x > 0, \end{cases}$$

а степени понимаются в смысле свертывания:

$$F^0 = E_0, \quad F^1 = F, \quad F^2 = F * F \text{ и т. д.}$$

Очевидно, что при переходе от величин ξ_k к величинам

$$\xi_k' = \xi_k - a_k$$

величины a_k заменяется на $a_k' = 0$, а функции Φ и Ψ на функции $\Phi'(x) = \Phi(x+a)$, $\Psi'(x) = \Psi(x+a)$. Поэтому ясно, что можно ограничиться рассмотрением случая

$$a_k = 0, \quad k = 1, \ldots, n; \quad a = 0.$$

Нам понадобится еще случайная величина

$$\zeta = \sum_k (1-\mu_k) \xi_k$$

и ее условные дисперсии

$$\sigma^2_{m_1 \ldots m_n} = \mathbf{D}(\zeta \mid \mu_1 = m_1, \ldots, \mu_n = m_n)$$

при фиксированных значениях величин $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Очевидно, что

$$\sigma^2_{m_1 \ldots m_n} = \sum_k (1-m_k) \sigma_k^2.$$

Положим теперь *

$$\Phi^{(0)}_{m_1 \ldots m_n} = \prod_k [F_k^{(0)}]^{1-m_k}, \quad \Phi^{(1)}_{m_1 \ldots m_n} \prod_k [F_k^{(1)}]^{m_k}.$$

---

* Определение функции $\Phi^{(0)}_{m_1 \ldots m_n}$ предполагает, что $m_k = 0$ или $= 1$. Определение функций $\Phi^{(1)}_{m_1 \ldots m_n}$ относится к любым неотрицательным m_k.

Отметив, что

$$\Phi = \sum_{m_1 \dots m_n} p_{m_1 \dots m_n} \Phi^{(1)}_{m_1 \dots m_n} * \Phi^{(0)}_{m_1 \dots m_n},$$

$$\Psi = \sum_{m_1 \dots m_n} q_{m_1 \dots m_n} \Phi^{(1)}_{m_1 \dots m_n} * G_{\sigma_*},$$

введем распределения

$$\Phi_1 = \Phi * G_{\sigma_0} = \sum_{m_1 \dots m_n} p_{m_1 \dots m_n} \Phi^{(1)}_{m_1 \dots m_n} * \Phi^{(0)}_{m_1 \dots m_n} * G_{\sigma_0},$$

$$\Phi_2 = \sum_{m_1 \dots m_n} p_{m_1 \dots m_n} \Phi^{(1)}_{m_1 \dots m_n} * G_{\sigma_*}$$

Легко видеть, что в силу условия теоремы

$$\varepsilon_k (2l) \leqslant \varepsilon$$

и, так как $\Lambda \geqslant 2l$,

$$\varepsilon_k = \varepsilon_k (\Lambda) \leqslant \varepsilon \tag{3}$$

В обоих случаях А) и Б)

$$\sum_k \varepsilon_k \leqslant 2\varepsilon^{-4/5} \tag{4}$$

Из (3) и (4) вытекает, что

$$\sum_k \varepsilon_k^2 \leqslant 2\varepsilon^{1/5} \tag{5}$$

При помощи (5) и леммы 5 получим

$$\begin{aligned} |\Psi - \Phi_3| &\leqslant \sum_{m_1 \dots m_n} |p_{m_1 \dots m_n} - q_{m_1 \dots m_n}| \leqslant C_5 \sum_k p_k^2 = \\ &= 4C_5 \sum_k \varepsilon_k^2 \leqslant 8C_5 \varepsilon^{1/5}. \end{aligned} \tag{6}$$

В силу леммы 3 в предположении

$$|\delta^2_{m_1 \dots m_n} - \sigma^2| \leqslant \varepsilon^{1/5} \sigma_*^2 \tag{7}$$

имеет место неравенство

$$|G_{\sigma_{m_1 \dots m_n}} * G_{\sigma_0} - G_{\sigma_*}| \leqslant C_3 \varepsilon^{1/5}. \tag{8}$$

Поэтому,

$$|\Phi_2 - \Phi_3| \leqslant C_3 \varepsilon^{1/5} + 2 \sum\nolimits', \tag{9}$$

где Σ' есть сумма тех $p_{m_1 \dots m_n}$, для которых нарушено неравенство (7). Очевидно, что

$$\sum\nolimits' = \mathbf{P}(|\rho^2 - \sigma^2| > \varepsilon^{1/5} \sigma_*^2), \tag{10}$$

где

$$\rho^2 = \sum_k (1 - \mu_k) \sigma_k^2.$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\rho^2 &= \sum_k (1 - 2\varepsilon_k) \sigma_k^2 = \sigma^2, \\ \mathbf{D}\rho^2 &= \sum_k 2\varepsilon_k (1 - 2\varepsilon_k) \sigma_k^4 \end{aligned} \tag{11}$$

и, так как

$$\sigma_k^2 \leqslant \Lambda^2, \quad \varepsilon_k \leqslant \varepsilon$$

$$\mathbf{D}\rho^2 \leqslant 2\varepsilon \sum_k (1 - 2\varepsilon_k)\,\sigma_k^4 \leqslant 2\varepsilon\Lambda^2 \sum_k (1 - 2\varepsilon_k)\,\sigma_k^2 = 2\varepsilon\Lambda^2\sigma^2. \tag{12}$$

Из (10), (11) и (12) по неравенству Чебышева получаем

$$\sum{}' \leqslant \frac{2\varepsilon\Lambda^2\sigma^2}{\varepsilon^{2/5}\sigma_*^4} \leqslant 2\varepsilon^{3/5}\frac{\Lambda^2}{\sigma_0^2}. \tag{13}$$

Так как всегда $\sigma_0 \geqslant \Lambda$, $\varepsilon^{3/5} \leqslant \varepsilon^{1/5}$ из (9) и (13) вытекает

$$|\Phi_2 - \Phi_3| \leqslant (C_3 + 4)\,\varepsilon^{1/5}. \tag{14}$$

В силу леммы 7 и того обстоятельства, что в случае $\mu_k = 1$ имеет место неравенство

$$|\xi_k| \leqslant \Lambda,$$

справедливо неравенство

$$|\Phi^{(0)}_{m_1\ldots m_n} * G_{\sigma_0} - G_{\sigma_{m_1\ldots m_n}} * G_{\sigma_0}| \leqslant C_7\frac{\Lambda}{\sigma_0}, \tag{15}$$

из которого вытекает неравенство

$$|\Phi_1 - \Phi_2| \leqslant C_7\frac{\Lambda}{\sigma_0} \tag{16}$$

Из (6), (14) и (16) получаем

$$|\Psi - \Phi_1| \leqslant C_*\varepsilon^{1/5} + C_7\frac{\Lambda}{\sigma_0}, \tag{17}$$

где

$$C_* = 8C_5 + C_3 + 4.$$

2. Случай А. Окончание доказательства теоремы 1 различно в случаях А) и Б). Займемся сначала случаем А). В этом случае неравенство (17) в силу (А. 2) приобретает вид

$$|\Psi - \Phi_1| \leqslant (C_* + C_7)\,\varepsilon^{1/5}. \tag{18}$$

Напомним, что теперь

$$\Lambda = \lambda_0 > 2l, \tag{19}$$

$$\sum_k \varepsilon_k = \sum_k \varepsilon_k(\lambda_0) = 2\varepsilon^{-4/5}. \tag{20}$$

Легко видеть, что

$$1 - 2\varepsilon_k \leqslant Q_{F_k}(\Lambda) \leqslant 1 - \varepsilon_k \tag{21}$$

и, следовательно, величина

$$s = \sum_{k=1}^{n} [1 - Q_{F_k}(\Lambda)]$$

допускает оценки

$$2\varepsilon^{-4/5} \leqslant s \leqslant 4\varepsilon^{-4/5}. \tag{22}$$

В силу леммы 1* и формул (22) и (А.2)

$$Q_\Phi(\tau_0) \leqslant \frac{C_1\sigma_0}{\Lambda\sqrt{s}} \leqslant 2C_1\varepsilon^{1/5}. \tag{23}$$

---

* Легко подсчитать, что в силу (А.2), (22) и принятого ограничения $\varepsilon \leqslant 1$ дополнительное условие $R^2 \geqslant r^2 \log s$ для $R = \sigma_0$ и $r = \Lambda$ выполнено.

По лемме 2 из (23) получаем

$$|\Phi - \Phi_1| = |\Phi - \Phi * G_{\sigma_0}| \leqslant C_2 Q_\Phi(\sigma_0) \leqslant 2C_1C_2\varepsilon^{1/5}. \tag{24}$$

Из (18) и (24) получаем, наконец,

$$|\Phi - \Psi| \leqslant (C_* + C_7 + 2C_1C_2)\,\varepsilon^{1/5}. \tag{25}$$

Из (25) уже непосредственно вытекает (для случая А) заключение теоремы, причем сдвиги на расстояние L остались неиспользованными: они понадобятся лишь в случае Б.

3. Случай Б. В этом случае в силу (Б.2) неравенство (17) приобретает вид

$$|\Psi - \Phi_1| \leqslant C_*\varepsilon^{1/5} + 2^{3/2}C_7\frac{l}{L}\sqrt{\log\frac{L}{l}}. \tag{26}$$

По лемме 4 в силу (Б. 2) при

$$\eta = C_4 e^{-\frac{L^2}{2\sigma_0}} = C_4 e^{\log\frac{l}{L}} = C_4\frac{l}{L} \tag{27}$$

имеют место неравенства

$$\Phi_1(x - L) - \eta \leqslant \Phi(x) \leqslant \Phi_1(x + L) + \eta. \tag{28}$$

Положим теперь

$$C = C_* + 2^{3/2}C_7 + 2C_1C_2 + \frac{C_4}{\log 2}.$$

Так как $L > 2l$, $\log\frac{L}{l} > \log 2$ из (26) и (28) получаем при

$$\delta = C\max\left(\frac{L}{l}\sqrt{\log\frac{L}{l}},\ \varepsilon^{1/5}\right)$$

неравенства

$$\Psi(x - L) - \delta \leqslant \Phi(x) \leqslant \Psi(x + L) + \delta. \tag{29}$$

Как видно из неравенства (25), неравенство (29), доказанное сейчас для случая Б), верно и в случае А). Этим заканчивается доказательство теоремы 1.

4. Доказательство теоремы 2. Доказательство теоремы 2 по существу не отличается от доказательства теоремы 1 в варианте А, причем полагается

$$\varepsilon = \frac{c}{n}$$

Естественно, что ε_k и $p_k = 2\varepsilon_k$ теперь не зависит от k. В силу соотношения

$$\sum_k \varepsilon_k = 2\varepsilon^{-4/5}$$

p_k должны быть равны

$$p = c'n^{-1/5}.$$

Вводное построение с переходом от Φ к

$$\Phi' = \Phi * G_{\delta\sqrt{n}}$$

делается теперь излишним и даже несколько затруднило бы получение окончательного результата. Ссылку на лемму 5 целесообразно заменить ссылкой на более простую лемму 6. Ввиду возможности указанных упрощений мы даем далее изложение доказательства теоремы 2, не за-

висимое от п.п. 1—2. Общую функцию распределения слагаемых ξ_k будем обозначать $F(x) = \mathbf{P}(\xi_k < x)$.

Условия

$$F(F^{-1}(y)) \leqslant y \leqslant F(F^{-1}(y) + 0)$$

определяют обобщенную обратную функцию F^{-1} однозначно, кроме не более чем счетного множества точек y, соответствующих интервалам постоянства функции F. Можно без ограничения общности считать, что

$$\xi_k = F^{-1}(\eta_k),$$

где случайные величины η_k взаимно независимы и распределены равномерно на интервале $0 < y < 1$.

Положим

$$p = \frac{1}{2} n^{-1/5},$$

$$\mu_k = \begin{cases} 0, & \text{если } p/2 < \eta_k < 1 - p/2, \\ 1 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

$$a = (1-p)\,\mathbf{M}(\xi_k \mid \mu_k = 0),$$
$$\sigma^2 = (1-p)\,\mathbf{D}(\xi_k \mid \mu_k = 0),$$
$$F_0(x) = \mathbf{P}(\xi_k < x \mid \mu_k = 0),$$
$$F_1(x) = \mathbf{P}(\xi_k < x \mid \mu_k = 1).$$

Легко видеть, что

$$\Phi = \mathbf{M} \prod_k [\mu_k F_1 + (1-\mu_k) F_0] = \sum_k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} F_1^k * F_1^{n-k}.$$

Искомое неограниченное делимое распределение Ψ зададим в виде

$$\Psi = \sum \frac{(np)^k}{k!} e^{-np} F_1^k * G_{na,\,\sigma_*},$$

где

$$\sigma_*^2 = n\sigma^2 + \sigma_0^2,$$

$$\sigma_0^2 = 2n^{1/5}\Lambda,$$

$$\Lambda = F^{-1}(1 - p/2) - F(p/2).$$

Как и в п. 1, достаточно рассмотреть случай $a = 0$. Положим

$$\Phi_1 = \Phi * G_{\sigma_0} = \sum_k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} F_1^k * F_0^{n-k} * G_{\sigma_0},$$

$$\Phi_2 = \sum_k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} F_1^k * G_{\sigma_k} * G_{\sigma_0}, \quad \sigma_k^2 = \frac{n-k}{1-p}\sigma^2,$$

$$\Phi_3 = \sum_k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} F_1^k * G_{\sigma_*}.$$

В силу леммы 6

$$|\Psi - \Phi_3| \leqslant C_6 p = \frac{C_6}{2} n^{-1/5}. \tag{30}$$

В силу леммы 3 в предположении

$$\left| \frac{n-k}{1-p} - n \right| \leqslant n^{4/5} \tag{31}$$

имеет место неравенство

$$|G_{\sigma_k} * G_{\sigma_0} - G_{\sigma_*}| \leqslant C_3 n^{-1/5}, \tag{32}$$

и, следовательно,

$$|\Phi_2 - \Phi_3| \leqslant C_3 n^{-1/5} + 2\Sigma', \tag{33}$$

где Σ' есть сумма тех $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, для которых нарушено неравенство (31). Очевидно, что

$$\sum{}' = \mathbf{P}(|\chi - n(1-p)| > n^{4/5}),$$

где $\chi = \sum_k \mu_k$. Поэтому в силу неравенства Чебышева

$$\sum{}' \leqslant \frac{\mathbf{D}\chi}{n^{8/5}} = \frac{np(1-p)}{n^{8/5}} \leqslant n^{-4/5} \leqslant n^{-1/5}. \tag{34}$$

Из (33) и (34) получаем

$$|\Phi_2 - \Phi_3| \leqslant (C_3 + 2) n^{-4/5}. \tag{35}$$

В силу леммы 7, так как при $\mu_k = 1$ при принятом предположении $a = 0$ имеет место неравенство

$$|\xi_k| \leqslant \Lambda,$$

то справедливо неравенство

$$|F_0^{n-k} * G_{\sigma_0} - G_{\sigma_k} * G_{\sigma_0}| \leqslant C_7 \frac{\Lambda}{\sigma_0} = \frac{C_7}{2} n^{-1/5},$$

из которого вытекает

$$|\Phi_1 - \Phi_2| \leqslant \frac{C_7}{2} n^{-1/5}. \tag{36}$$

Легко видеть, что

$$Q_F\left(\frac{\Lambda}{2}\right) \leqslant 1 - \frac{p}{2}.$$

В силу леммы 1 отсюда следует

$$Q_\Phi(\sigma_0) \leqslant \frac{2C_1\sigma_0}{\Lambda\sqrt{n\frac{p}{2}}} = 4C_1 n^{-1/5}. \tag{37}$$

В силу леммы 2 из (37) вытекает

$$|\Phi - \Phi_1| \leqslant C_2 Q_\Phi(\sigma_0) \leqslant 4C_1 C_2 n^{-1/5}. \tag{38}$$

Из (30), (35), (36), (38) получаем

$$|\Phi - \Psi| \leqslant \left(\frac{C_6}{2} + C_3 + 2 + \frac{C_7}{2} + 4C_1C_2\right) n^{-1/5},$$

чем и заканчивается доказательство теоремы 2.

Поступила в редакцию
12. 11. 56

ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Lévy, Théorie de l'addition des variables aléatoires. Paris, 1937.
[2] W. Doeblin, Bull. Sci. Math., 63 (1939) 23, 35.
[3] Ю. В. Прохоров, ДАН СССР, 105 (1955), 645.

DEUX THÉORÈMES ASYMPTOTIQUES UNIFORMES POUR DES SOMMES DES VARIABLES ALÉATOIRES

A. N. KOLMOGOROV (MOSKOU)

(*Sommaire*)

Soit $\xi_1, \ldots, \xi_n$ des variables aléatoires indépendantes,

$$\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_n$$

et Φ, $F_1, \ldots, F_n$ les fonctions de distribution correspondantes. Désignons par $\mathfrak{E}$ l'ensemble des distributions dégénérées

$$E(x) = \begin{cases} 0 \text{ pour } x \leqslant a, \\ 1 \text{ pour } x > a \end{cases}$$

et par Θ l'ensemble des distributions infiniment divisibles.

Théorème I. *Il existe une constante C telle que pour tout $\varepsilon > 0$, $L > 2l > 0$ les inégalités*

$$E_k(x-l) - \varepsilon \leqslant F_k(x) \leqslant E_k(x+l) + \varepsilon,$$
$$E_k \in \mathfrak{E};\ k = 1, \ldots, n; -\infty < x < +\infty$$

impliquent l'existence d'une fonction $\Psi \in \Theta$ pour lequel on a

$$\Psi(x-L) - \delta \leqslant \Phi(x) \leqslant \Psi(x+L) + \delta, \quad -\infty < x < +\infty$$

avec

$$\delta = C \max\left(\frac{L}{l}\sqrt{\log\frac{L}{l}}, \varepsilon^{1/5}\right).$$

Dans le cas des distributions F_k égales

$$F_k(x) \equiv F(x),\ k = 1, \ldots, n$$

on démontre un théorème plus simple:

Théorème II. *Il existe une constante C telle que pour tout n et F on peut trouver une fonction $\Psi \in \Theta$ vérifiant l'inégalité*

$$|\Psi(x) - \Phi(x)| \leqslant Cn^{-1/5}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том I И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 4*
1956

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ БАЙЕСОВСКИЕ РЕШЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ПРИЕМОЧНОГО СТАТИСТИЧЕСКОГО КОНТРОЛЯ

В. С. МИХАЛЕВИЧ

Введение

Вопрос о выборе наиболее рациональных методов приемочного контроля имеет важное значение в связи с тем, что часто сплошной контроль деталей или другого рода изделий невозможен ввиду недостатка времени или просто экономически невыгоден. Статистический приемочный контроль заключается в том, что в каждой предъявленной к проверке партии изделий проверяется лишь некоторая ее часть, по качеству которой решают: принять всю партию или забраковать ее. Такой способ, естественно, приводит к снижению затрат на контрольную работу, но так как проверяется в каждой партии лишь ее часть, то можно иногда и ошибиться: партию с малым количеством дефектных изделий забраковать или плохую партию принять.

Для репрезентативности проверяемой части партии выбор изделий для проверки производят случайным образом. Наряду с этим стремятся уравновесить две противоположные тенденции:

1) сократить затраты на контрольную работу,

2) уменьшить возможность принять неверное решение, — так, чтобы достигался наибольший экономический эффект при проверке по выбранному методу большого количества партии.

В настоящей работе рассматриваются только методы приемочного контроля по качественному признаку, т. е. когда к решению о приеме или браковке партии приходят на основании знания числа дефектных изделий в проверенной ее части и не учитывают количественную информацию о «степени годности или дефектности каждого изделия» (величину выхода за технические допуски и т. п.).

Наиболее распространенным в современной практике, ввиду простоты, является метод однократной неурезанной выборки, математическая теория которого разработана А. Н. Колмогоровым [1], [2] и С. Х. Сираждиновым [3].

Чтобы учесть все возможные нерандомизированные способы контроля, используем понятие решающей функции, введенное А. Вальдом [4]. Пусть $\mathfrak{X}_N = \{x\}$ — множество всех последовательностей $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$, где $x_i = 0$ либо $x_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Решающей функцией

$R(x)$ назовем вектор-функцию $\{\nu(x),\ d(x)\}$, определенную на $\mathfrak{X}_N$, где $\nu(x)$ может принимать только значения $0,1,\ldots,N$, а $d(x)$ принимает только значения d_1 и d_2, причем выполнено следующее условие: если $\nu(x)=k$ и $x'=\{x_1', x_2', \ldots, x_N'\}$ таково, что $x_i'=x_i;\ i=1,\ldots,k$, то $\nu(x')=k,\ d(x')=d(x)$. Функция $\nu(x)$ показывает, сколько изделий нужно извлекать из партии до прихода к решению включительно, если ход контрольного процесса есть $x_1, x_2, \ldots, x_{\nu(x)}$, где $x_i=0$, если i-ое извлеченное из партии изделие оказалось годным, и $x_i=1$, если оно оказалось дефектным. Функция $d(x)$ показывает, какое решение принимают после проверки $\nu(x)$ изделий: d_1 — приемка партии, d_2 — ее браковка.

Выбор наиболее экономного, в конкретных условиях данного производства, способа приемочного контроля должен учитывать особенности производства и род проверяемой продукции. Пусть известны:

a — убыток, если дефектное изделие оказалось принятым,

B — убыток, если партия забракована,

C — стоимость проверки одного изделия.

Если контроль партии с числом дефектных изделий X осуществляется по методу, определяемому решающей функцией $R(x)=\{\nu(x),\ d(x)\}$, то экономическим показателем его, в соответствии с Вальдом, является средний убыток

$$U_X[R(x)]=\sum_m a(X-m)\,P\{d_1,m\mid X\}+BP\{d_2\mid X\}+C\sum_k k\,\mathbf{P}\{\nu=k\mid X\}, \tag{1}$$

где $P\{d_1,\ m\mid X\}$ есть вероятность того, что партия принята и среди проверенных изделий оказалось m дефектных, $P\{d_2\mid X\}$ — вероятность браковки партии, $\mathbf{P}\{\nu=k\mid X\}$ — вероятность того, что к решению приходят, проверив ровно k изделий *.

Для устойчивого производства естественно учитывать информацию о частоте появления партий с тем или иным составом брака. Пусть $\pi(X)$ — вероятность того, что предъявленная к проверке партия имеет X дефектных изделий. Тогда имеем следующую характеристику метода $R(x)$ по отношению к данному производству $\{a,\ B,\ C,\ \pi(X)\}$:

$$u[R(x)]=\sum_{X=1}^{N} U_X[R(x)]\,\pi(X). \tag{2}$$

Оптимальным является метод контроля, определяемый решающей функцией $\hat{R}(x)$, у которой $u[\hat{R}(x)]\leqslant u[R(x)]$ при всех других $R(x)$. Следуя терминологии Вальда, будем называть $\hat{R}(x)$ байесовским решением по отношению к $\{a,\ B,\ C,\ \pi(X)\}$.

---

* При оценке метода контроля по показателю (1) не учитывается то обстоятельство, что при одинаковом математическом ожидании $\mathbf{M}(\nu\mid X)=\sum_k k\mathbf{P}(\nu=k\mid X)$ методы с меньшей *изменчивостью* объема контрольной работы ν могут иметь существенное преимущество. Вообще, обсуждение вопросов практической применимости найденных оптимальных методов в этой статье мы оставляем в стороне.

Представляет интерес также задача об отыскании оптимального метода среди всех методов контроля, у которых число испытаний до прихода к решению не превышает заданного числа T. Таким образом, если ввести обозначение $R_T(x)$ для решающей функции, у которой $\nu(x) \leqslant T$ при всех x, то речь идет о решающей функции $\hat{R}_T(x)$, для которой $u[\hat{R}_T(x)] \leqslant u[R_T(x)]$ при всех $R_T(x)$.

В настоящей работе дается описание оптимальных методов контроля при условии возможности использования биномиального распределения вместо гипергеометрического, что предусматривает большой объем каждой контролируемой партии. Оптимальными методами оказываются определенного вида многократные урезанные выборки. Указывается способ вычисления границ, определяющих эти методы, и изучается вопрос об аппроксимации их байесовскими решениями для процесса Пуассона.

Некоторые теоремы, относящиеся к описанию байесовских решений (§ 2, § 4), выходят за рамки задач о статистическом контроле. Краткое сообщение об излагаемых ниже результатах сделано в [11].

Выражаю глубокую благодарность А. Н. Колмогорову, под руководством которого выполнена настоящая работа.

§ 1. Байесовские решения при независимых испытаниях

Основным аппаратом, используемым при решении сформулированных во введении задач, является способ построения байесовских решений, указанный впервые в работе Вальда и Вольфовича [5], и при более общих условиях в книге Блеквелла и Гиршика [9]. Вводя полезное понятие a-срезки решающей функции, можно кратко изложить их результаты, рассматривая одновременно и урезанные по ν решающие функции.

Пусть $\mathfrak{X} = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$ — множество всех числовых последовательностей $x = \{x_1, x_2, \ldots\}$ и $\mathfrak{B} = \{B\}$ — минимальное борелевское поле подмножеств $\mathfrak{X}$, содержащее все цилиндры $C_{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m}}$ с конечномерными основаниями $(m = 1, 2, \ldots)$ $C_{a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}} = \{x,\ x_{i_k} < a_{i_k};\quad k = 1, \ldots, m\}$. Пусть, далее, $\Omega = \{\omega\}$ — некоторое множество и каждому элементу его ω соответствует функция $F_\omega(z)$ распределения вероятностей на числовой прямой. При каждом фиксированном ω можно известным способом [10] построить вероятностную меру $F^*_\omega(B)$ на $\mathfrak{B}$, положив $F^*_\omega(C_{a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}}) = \prod_{k=1}^{m} F_\omega(a_{i_k})$ (независимость испытаний). Обозначим через $D = \{d\}$ множество всех окончательных решений, которые может принимать исследователь.

Определение 1.1. *Решающей функцией* $R(x)$ называют вектор-функцию $\{\nu(x), d(x)\}$, определенную на $\mathfrak{X}$ и удовлетворяющую условиям:

1) $\nu(x)$ принимает только неотрицательные целые значения и $\mathfrak{B}$-измерима,

2) $d(x)$ принимает значения из D и $\mathfrak{B}$-измерима,

3) если $\nu(x) = k$, то для любого $x' = \{x'_1, x'_2, \ldots\}$, для которого $x'_i = x_i\ (i = 1, \ldots, k)$, будет также $\nu(x') = k$, $d(x') = d(x)$.

Определение 1.2. *Функцией убытка* называют вещественную функцию $W(\omega, d)$ определенную на $\Omega \times D$, характеризующую убыток (соответственно, — выгоду), если принять решение d, а испытания проведены над случайной величиной с функцией распределения $F_\omega(z)$.

Пусть стоимость производства n испытаний равна cn $(c>0)$; $n = 1, 2, \ldots$. Для любой $R(x)$ и каждого ω имеем средний убыток

$$U_\omega[R(x)] = \int_{\mathfrak{X}} [W(\omega, d(x)) + c\nu(x)] F_\omega(dx). \tag{1.1}$$

Обозначим через $\mathfrak{H} = \{H\}$ некоторое борелевское поле подмножеств из Ω, содержащее Ω, и пусть $\xi(H)$ — некоторая вероятностная мера на $\mathfrak{H}$, т. е. $0 \leqslant \xi(H) \leqslant 1$, $\xi(\Omega) = 1$.

Учет ее приводит к осреднению (1.1)

$$u_\xi[R(x)] = \int_\Omega U_\omega[R(x)]\, \xi(d\omega). \tag{1.2}$$

Для возможности рассматривать (1.1) и (1.2) необходимо ввести предположения

1. $W(\omega, d)$ $\mathfrak{H}$-измерима при каждом d.

2. Рассматриваются только такие решающие функции, что $W(\omega, d(x))$ $\mathfrak{A}$-измерима, где $\mathfrak{A}$ — борелевское поле подмножеств произведения $\mathfrak{X} \times \Omega$, являющееся произведением $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{H}$. Пусть $\mathfrak{R}_W$ — множество всех таких решающих функций, $\mathfrak{R}_W(T)$ — подмножество $\mathfrak{R}_W$, состоящее из всех решающих функций, у которых $\nu(x) \leqslant T$ при всех x.

3. Распределение $F_\omega(z)$ при всех ω дискретно или абсолютно непрерывно. Обозначив $p(z, \omega)$, соответственно, вероятность принять значение z или плотность для $F_\omega(z)$, положим, что $p(z, \omega)$ $\mathfrak{A}$-измерима.

4. D состоит из конечного числа элементов.

Определение 1.3. *Байесовским решением относительно* $\{W, c, \xi\}$ называется такая $\hat{R}(x) \in \mathfrak{R}_W$, что $u_\xi[\hat{R}] \leqslant u[R]$ при всех $R \in \mathfrak{R}_W$.

Определение 1.4. ν(до T)-*урезанным байесовским решением относительно* $\{W, c, \xi\}$ называется такая решающая функция $\hat{R}_T(x) \in \mathfrak{R}_W(T)$, что $u_\xi[\hat{R}_T] \leqslant u_\xi[R_T]$ для любой $R_T \in \mathfrak{R}_W(T)$.

Введем «апостериорные» меры на $\mathfrak{H}$

$$\xi_{x_1, \ldots, x_n}(H) = \frac{\int_H p(x_1, \omega) \ldots p(x_n, \omega)\, \xi(d\omega)}{\int_\Omega p(x_1, \omega) \ldots p(x_n, \omega)\, \xi(d\omega)} \tag{1.3}$$

и вычислим «апостериорный» убыток

$$u_{\xi_{x_1, \ldots, x_n}}[R] = \int_\Omega U_\omega[R]\, \xi_{x_1, \ldots, x_n}(d\omega).$$

Обозначим

$$p(a \mid \xi) = \int_\Omega p(a, \omega)\, \xi(d\omega). \tag{1.4}$$

Определение 1.5. *a-срезкой решающей функции* $R(x) = \{\nu(x), d(x)\}$ называют такую решающую функцию $R^a(x) = \{\nu_a(x), d_a(x)\}$, у которой для любого $x = \{x_1, x_2, \ldots\}$.

$$1)\ \nu_a(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ если } \nu(x) = 0, \\ \nu(a, x_1, x_2, \ldots), & \text{если } \nu(x) \geqslant 1, \end{cases}$$

$$2)\ d_a(x) = d(a, x_1, \ldots, x_n, \ldots).$$

Определение 1.6. *$a_1, \ldots, a_m$-срезкой решающей функции $R(x)$ называется решающая функция $R^{a_1,\ldots,a_m}(x)$, являющаяся a_m-срезкой решающей функции $R^{a_1,\ldots,a_{m-1}}(x)$.*

Очевидно, если $R(x) \in \mathfrak{R}_W$, то и $R^a \in \mathfrak{R}_W$. Обозначим через $\mathfrak{R}_W^0$ подмножество $\mathfrak{R}_W$, состоящее из всех решающих функций, у которых $\nu(x) = 0$. Пусть $\mathfrak{R}_W^1 = \mathfrak{R}_W - \mathfrak{R}_W^0$.

Лемма 1.1. *Для каждой $R(x) \in \mathfrak{R}_W$*

$$u_\xi[R] = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\xi_a}[R_a]\, p(a \mid \xi)\, da, \text{ если } R(x) \in \mathfrak{R}_W^0, \tag{1.5}$$

$$u_\xi[R] = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\xi_a}[R_a]\, p(a \mid \xi)\, da + c, \text{ если } R(x) \in \mathfrak{R}_W^1. \tag{1.6}$$

Действительно, из (1.3) и (1.4) имеем

$$u_{\xi_a}[R_a] = \frac{\int_\Omega U_\omega[R_a]\, p(a, \omega)\, \xi(d\omega)}{\int_\Omega p(a, \omega)\, \xi(d\omega)} = \frac{\int_\Omega U_\omega[R_a]\, p(a, \omega)\, \xi(d\omega)}{p(a \mid \xi)}. \tag{1.7}$$

С другой стороны,

$$U_\omega[R] = \int_{\mathfrak{X}} W(\omega, d(x))\, F_\omega^*(dx) + c \int_{\mathfrak{X}} \nu(x)\, F_\omega^*(dx) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathfrak{X}} W(\omega, d(a, x))\, F_\omega^*(dx)\, p(a, \omega)\, da + c \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathfrak{X}} \nu(a, x)\, p(a, \omega)\, F_\omega^*(dx)\, da$$

и использование определения 1.5 вместе с (1.7) завершает доказательство леммы.

Определим теперь для каждой $\xi_{x_1,\ldots,x_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ числа

$$\rho_0(\xi_{x_1,\ldots,x_n}) = \min_d \int_\Omega W(\omega, d)\, \xi_{x_1,\ldots,x_n}(d\omega) \tag{1.8}$$

— риск прекращения испытаний после наблюдений $x_1, \ldots, x_n$, и

$$\rho_1(\xi_{x_1,\ldots,x_n}) = \inf_{R \in \mathfrak{R}_W^1} u_{\xi_{x_1,\ldots,x_n}}[R] \tag{1.9}$$

— риск продолжать испытания после $x_1, \ldots, x_n$. Аналогично, для ν (до T)-урезанных решающих функций

$$\rho_1^T(\xi_{x_1,\ldots,x_n}) = \inf_{R \in \mathfrak{R}_{W(T-n)}^1} u_{\xi_{x_1,\ldots,x_n}}[R], \tag{1.10}$$

где $T \geqslant n \geqslant 1$, $\mathfrak{R}_W^1(T) = \mathfrak{R}_W(T) - \mathfrak{R}_W^0$.

Обозначим $\rho(\xi) = \min\{\rho_0(\xi), \rho_1(\xi)\}$, $\rho^T(\xi) = \min\{\rho_0^T(\xi), \rho_1^T(\xi)\}$. Минимизация равенств (1.6) приводит к соотношениям

$$\rho_1(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\xi_a)\, p(a \mid \xi)\, da + c, \tag{1.11}$$

$$\rho_1^T(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho^T(\xi_a)\, p(a \mid \xi)\, da + c. \tag{1.12}$$

Аналогично

$$\rho_1(\xi_{x_1,\ldots,x_n}) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\xi_{x_1,\ldots,x_n, a})\, p(a \mid \xi)\, da + c, \tag{1.13}$$

$$\rho_1^T(\xi_{x_1,\ldots,x_n}) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho^T(\xi_{x_1,\ldots,x_n, a})\, p(a \mid \xi)\, da + c. \tag{1.14}$$

Отсюда вытекают следствия

Следствие 1.1. *Для того, чтобы решающая функция* $R(x) \in \mathfrak{R}_W^1$ *была байесовским решением относительно* $\{W, c, \xi\}$, *необходимо и достаточно, чтобы, с точностью до множества* A *с* $\int_A p(a \mid \xi)\, da = 0$, *каждая а-срезка* $R^a(x)$ *являлась байесовским решением относительно* $\{W, c, \xi_a\}$.

Следствие 1.2. *Для того, чтобы решающая функция* $R(x) \in \mathfrak{R}_W^T$ *была* ν *(до* T*)-урезанным байесовским решением, необходимо и достаточно, чтобы с точностью до множества* A *с* $\int_A p(a \mid \xi)\, da = 0$, *каждая а-срезка* $R^a(x)$ *была* ν *(до* $T-1$*)-урезанным байесовским решением относительно* $\{W, c, \xi_a\}$.

Так как, в силу определения чисел $\rho_0(\xi_{x_1,\ldots,x_n})$ и $\rho_1(\xi_{x_1,\ldots,x_n})$ при $\rho_0(\xi_{x_1,\ldots,x_n}) < \rho_1(\xi_{x_1,\ldots,x_n})$ каждое байесовское решение относительно $\{W, c, \xi_{x_1,\ldots,x_n}\}$, очевидно, принадлежит $\mathfrak{R}_W^0$, а при $\rho_0(\xi_{x_1,\ldots,x_n}) > \rho_1(\xi_{x_1,\ldots,x_n})$ принадлежит $\mathfrak{R}_W^1$, то следствия 1.1—1.2 дают такую возможность построения байесовских решений:

1. (α_1) — если $\rho_0(\xi) < \rho_1(\xi)$, то испытаний не производим, а принимаем $\hat{d}$, для которого $\int_\Omega W(\omega, \hat{d})\, \xi(d\omega) = \rho_0(\xi)$;

(β_1) — если $\rho_0(\xi) > \rho_1(\xi)$, то делаем одно испытание;

(γ_1) — если $\rho_0(\xi) = \rho_1(\xi)$, то поступаем либо как в (α_1), либо как в (β_1).

2. Если в 1 имело место (β_1) либо в (γ_1) поступили аналогично (β_1), то строим по результату x_1 испытания меру ξ_{x_1}, вычисляем $\rho_0(\xi_{x_1})$ и $\rho_1(\xi_{x_1})$ и в зависимости от соотношений между ними подразделяем случаи (α_2), (β_2), (γ_2) и т. д. В том, что каждая описанная таким образом решающая функция принадлежит $\mathfrak{R}_W$, легко убедиться из свойств измеримости функций ρ_0 и ρ_1 и конечности множества D.

Аналогично строятся ν (до T)-урезанные байесовские решения по сравнению ρ_0^T и ρ_1^T при последовательных испытаниях.

Замечание. Нетрудно понять, что рандомизация (последовательное принятие решений с определенными вероятностями при каждом испытании) не может уменьшить чисел ρ_0 и ρ_1, так что можно ограничиться, как мы и сделали, только нерандомизированными решающими функциями.

§ 2. Байесовские решения при выборе между двумя решениями для экспоненциальных семейств распределений

Способ построения байесовских решений, описанный выше, полностью определялся апостериорными мерами (1.3). Но хорошо известно, что «перераспределение» меры ξ в $\xi_{x_1,\ldots,x_n}$ зависит только от достаточной статистики $\chi(x_1, \ldots, x_n)$ выборки объема n (см. [1], [7]) для семейства $\{F_\omega(z)\}$, т. е. если $\chi(x_1, \ldots, x_n) = \chi(x_1', \ldots, x_n')$, то

$$\xi_{x_1,\ldots,x_n}(H) = \xi_{x_1',\ldots,x_n'}(H) = \xi_{v,n}(H). \tag{2.1}$$

Во всем дальнейшем мы рассматриваем только выбор между двумя решениями d_1 и d_2, так что естественно обозначить $W_1(\omega) = W(\omega, d_1)$, $W_2(\omega) = W(\omega, d_2)$ и определить весовую характеристику $W(\omega) = W_1(\omega) - W_2(\omega)$. Нетрудно показать, что если у пар $[W_1(\omega), W_2(\omega)]$ и $[\widetilde{W}_1(\omega), \widetilde{W}_2(\omega)]$ весовые характеристики совпадают, то байесовское решение относительно $[W, c, \xi]$ является байесовским решением и относительно $[\widetilde{W}, c, \xi]$.

Интересующие нас для целей изучения оптимальных методов статистического контроля биномиальное, пуассоновское и нормальное (с известной дисперсией) семейства распределений вероятностей являются частными случаями следующего типа семейств: пусть $\psi(\omega)$ — положительная на $\Omega = \{\omega\}$ функция, $\mu \geqslant 0$ — дискретная или абсолютно непрерывная мера на вещественной прямой, и пусть

$$F_\omega(z) = \int\limits_{x \leqslant z} \psi(\omega)\, e^{x\omega} \mu(dx) \tag{2.2}$$

является при каждом $\omega \in \Omega$ функцией распределения вероятностей на вещественной прямой. (Относительно $\Omega = [\underline{\omega}, \bar{\omega}]$ предполагается, что оно — либо отрезок, либо интервал, либо полупрямая, или же вся прямая $-\infty < \omega < +\infty$.)

Для каждого семейства вида (2.2) достаточной статистикой выборки объема n является $x_1 + \ldots + x_n$ (см. [7]). Обобщая результаты Собела [6], мы покажем, что байесовские решения для (2.2) имеют простую геометрическую структуру.

Заметим, что построение байесовских решений удобно теперь иллюстрировать в координатной системе (v, n), вычисляя

$$\rho(\xi_{x_1,\ldots,x_n}) = \rho(v, n) = \min\{\rho_1(v, n), \rho_0(v, n)\} \tag{2.3}$$

в каждой точке v, являющейся возможным (при данном n) значением для $x_1 + \ldots + x_n$. Может оказаться, что построенное указанным в § 2 способом байесовское решение окажется урезанным по v, т. е. найдется такое $N_0 = N_0(W, c, \xi)$, что $\nu(x) < N_0$ для почти всех $v = x_1 + \ldots + x_n$, $(n = 1, 2, \ldots)$.

Для этого, например, достаточно условия: для почти всех v *

---

* Под выражением: «свойство L выполнено для почти всех x» будем понимать утверждение, что существует такое множество $\mathfrak{X}_L \subset \mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}_L \in \mathfrak{B}$, что $F^*_\omega(\mathfrak{X}_L) = 1$ при каждом ω из $\Omega_L \in \mathfrak{B}$, для которого $\xi(\Omega_L) = 1$. Очевидно, при построении байесовских решений достаточно считать все рассматриваемые функции R определенными не на всем $\mathfrak{X}$, а для почти всех x.

$$\rho(v, N_0) = \rho_0(v, N_0) < \rho_1(v, N_0). \qquad (2.4)$$

Для урезанного по ν байесовского решения процесс вычисления функции $\rho_1(v, n)$ можно сделать эффективным, используя рекуррентную формулу

$$\rho_1(v, n) = \int_{\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(v + y, n + 1)\, dF_{\omega}(y)\, \xi_{v, n}(d\omega) + c, \qquad (2.5)$$

$$n = N_0 - 1, N_0 - 2, \ldots, \rho(v, N_0) = \rho_0(v, N_0),$$

вытекающую из (1.13), (2.1), (2.3).

Заметим, что вычисление ν (до T)-урезанных байесовских решений можно произвести по формуле, аналогичной (2.5), с заменой $\rho_1(v, n)$ на $\rho_1^T(v, n)$, $\rho(v, n)$ на $\rho^T(v, n)$ и N_0 на $T + 1$.

Обозначим через $S_{\bar{x}}$ минимальный отрезок, содержащий все возможные для (2.2) $\frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)$ при $n = 1, 2, \ldots$, и для каждого $\bar{x} \in S_{\bar{x}}$ определим функцию

$$g_{\bar{x}}(\omega) = \psi(\omega) e^{\bar{x}\omega}.$$

Пусть выполнены следующие условия:

а) Весовая характеристика $W(\omega)$ является неубывающей функцией на $\Omega = [\underline{\omega}, \bar{\omega}]$.

б) Внутри $[\underline{\omega}, \bar{\omega}]$ существует такое ω_0, что $W(\omega_0) = 0$ и в некотором отрезке $[\omega_0 + a, \bar{\omega}_0 - a]$, $a > 0$ выполнено условие $|W(\omega)| < c_1 < c$, причем ω_0 является точкой роста слева и справа для ξ, т. е. существует такой отрезок $[\omega_0 - b, \omega_0 + b]$, что для любого интервала $(\alpha, \beta) \subset [\omega_0 - b, \omega_0 + b]$ имеем $\xi(\alpha, \beta) > 0$.

в) При каждом $n \geqslant 1$ существует $\int_{\Omega} W(\omega)\, \xi_{v, n}(d\omega)$ для почти всех $v = x_1 + \ldots + x_n$.

г) Для каждого $\bar{x} \in S_{\bar{x}}$ существует такое $\hat{\omega} = \hat{\omega}(\bar{x})$, что $g_{\bar{x}}(\omega)$ строго возрастает на $[\underline{\omega}, \hat{\omega}]$ и строго убывает на $[\hat{\omega}, \bar{\omega}]$. При этом уравнение $\hat{\omega}(\bar{x}) = \omega_0$ имеет хотя бы одно решение $\bar{x}_0$, такое, что при некотором n существует

$$\frac{\int_{\Omega} W(\omega) [g_{\bar{x}_0}(\omega)]^{n_0} \xi(d\omega)}{\int_{\Omega} [g_{\bar{x}_0}(\omega)]^{n_0} \xi(d\omega)}.$$

Основная лемма. *Если выполнены условия* а) — г), *то* 1) *каждое байесовское решение является урезанным по* ν; 2) *существуют две такие последовательности* $a_1, \ldots, a_M$, $b_1, \ldots, b_M$, $(a_i \leqslant b_i;\ i = 1, \ldots, M)$, *что* (*каждое — в дискретном, почти каждое — в абсолютно непрерывном случаях*) *байесовское решение может быть описано следующим образом: пусть* $v(i) = x_1 + \ldots + x_i$ *и пусть уже* $a_i < v(i) < b_i$ $(i = 1, \ldots, n - 1, n < M)$, *— тогда при* $a_n < v(n) < b_n$ *производим еще* $n + 1$ *испытание, при* $v < a_n$ *прекращаем испытания и принимаем* d_1, *при* $v(n) > b_n$ *— прекращаем испытания и принимаем* d_2, *при* $v(n) = a_n$ *либо* $v(n) = b_n$ *или продолжаем испытания или принимаем, соответственно,* d_1 *или* d_2.

Доказательство. Нетрудно обнаружить, как и в [6], что функция $\hat{\omega}(\bar{x})$ является неубывающей на $S_{\bar{x}}$. В силу соображений о весовой

характеристике, высказанных в начале настоящего параграфа, достаточно рассматривать случай, когда

$$W_1(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } \omega \leqslant \omega_0, \\ W(\omega) & \text{при } \omega > \omega_0, \end{cases}$$

$$W_2(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } \omega > \omega_0, \\ -W(\omega) & \text{при } \omega \leqslant \omega_0. \end{cases}$$

Введем функции

$$r_i(v, n) = \int_\Omega W_i(\omega)\, \xi_{v,n}(d\omega), \quad (i = 1, 2) \tag{2.6}$$

так что $\rho_0(v, n) = \min\limits_i \{r_i(v, n)\}$, и обозначим

$$r(v, n) = \begin{cases} r_1(v, n), & \text{если } \hat{\omega}\left(\frac{v}{n}\right) \leqslant \omega_0, \\ r_2(v, n), & \text{если } \hat{\omega}\left(\frac{v}{n}\right) > \omega_0. \end{cases}$$

Если будет доказано, что при достаточно большом n имеем $r(v, n) < c$ равномерно по v, то из очевидных неравенств $\rho_0(v, n) \leqslant r(v, n)$ и $\rho_1(v, n) \geqslant c$ будет следовать первая часть леммы.

Предварительно покажем, что справедлива следующая

Лемма 2.1. *Если $L(\omega)$ — неубывающая функция, интегрируемая относительно $\xi_{v,n}$ при $v = v_1$ и $v = v_2$, причем $v_1 < v_2$, то*

$$\int_\Omega L(\omega)\, \xi_{v_1,n}(d\omega) \leqslant \int_\Omega L(\omega)\, \xi_{v_2,n}(d\omega). \tag{2.7}$$

Доказательство: Рассмотрим функции

$$p_{v,n}(\omega) = \frac{[\psi(\omega)]^n e^{vn}}{\int\limits_\Omega [\psi(\omega)]^n e^{vn}\, \xi(d\omega)}.$$

Так как при $v_1 < v_2$ отношение $p_{v_2,n}(\omega) / p_{v_1,n}(\omega)$ строго возрастает на Ω, то, обозначив $\Omega_+ = \{\omega,\ p_{v_2,n}(\omega) / p_{v_1,n}(\omega) \geqslant 1\}$ и $\Omega_- = \Omega - \Omega_+$, заключаем, что Ω_+ лежит справа от Ω_-, причем $p_{v_1,n}(\omega) - p_{v_2,n}(\omega)$ отрицательна на Ω_- и неотрицательна на Ω_+. Но $\int\limits_\Omega [p_{v_2,n}(\omega) - p_{v_1,n}(\omega)]\, \xi(d\omega) = 0$, а L — неубывающая, поэтому

$$\int_\Omega L(\omega)\, [p_{v_2,n}(\omega) - p_{v_1,n}(\omega)]\, \xi(d\omega) \geqslant 0.$$

Заметим, что если $L(\omega)$ не есть константа почти всюду (по мере ξ), то неравенство (2.7) — строгое.

Подобными же рассуждениями доказывается

Лемма 2.2. *Если функция $f(y)$ не убывает на $(-\infty, \infty)$, то при $\omega_1 < \omega_2$*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, dF_{\omega_1}(y) \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, dF_{\omega_2}(y), \tag{2.8}$$

причем знак строгого неравенства обеспечен, если $f(y)$ не есть константа почти всюду (как по мере F_{ω_1}, так и по мере F_{ω_2}).

Перейдем к оценке $r(v, n)$. В силу монотонности функции $\hat{\omega}(x)$, имеем $\hat{\omega}\left(\frac{v}{n}\right) \leqslant \omega_0$ при $v \leqslant \bar{x}_0 n$. Тогда из условий а) — г) и леммы 2.1 получаем следующую цепочку неравенств: при $n > n_0$ и $v < \bar{x}_0 n$

$$r(v, n) \leqslant \frac{\int\limits_{\Omega} W_1(\omega)\,[g_{\bar{x}_0}(\omega)]^n\,\xi(d\omega)}{\int\limits_{\Omega}[g_{\bar{x}_0}(\omega)]^n\,\xi(d\omega)} = \frac{\int\limits_{\omega_0}^{\omega_0+a} + \int\limits_{\omega_0+a}^{\bar{\omega}}}{\int\limits_{\Omega}[g_{\bar{x}_0}(\omega)]^n\,\xi(d\omega)} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 + \frac{\int\limits_{\omega_0+a}^{\bar{\omega}} W(\omega)\,[g_{\bar{x}_0}(\omega)]^{n_0}\xi(d\omega)}{\int\limits_{\Omega}[g_{\bar{x}_0}(\omega)]^{n_0}\xi(d\omega)} \cdot \frac{g_{\bar{x}_0}^{n-n_0}(\omega_0+a)\int\limits_{\Omega}[g_{\bar{x}_0}(\omega)]^{n_0}\xi(d\omega)}{\int\limits_{\omega_0+\frac{a}{2}}^{\omega_0+a}[g_{\bar{x}_0}(\omega)]^n\,\xi(d\omega)} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 + A\left[\frac{g_{\bar{x}_0}(\omega_0+a)}{g_{\bar{x}_0}\left(\omega_0+\frac{a}{2}\right)}\right]^{n-n_0} \frac{1}{\xi\left(\omega_0, \omega_0+\frac{a}{2}\right)}, \tag{2.9}$$

где A не зависит от v и n.

Ввиду того, что выражение в квадратных скобках < 1 и не зависит от n, и так как без ограничения общности $\frac{a}{2} \leqslant b$ $\left(\text{т. е. } \xi\left(\omega_0, \omega_0+\frac{a}{2}\right) > 0\right)$ и от n не зависит, то при достаточно большом n получаем нужную оценку. Так как при $v \geqslant n\bar{x}_0$ и достаточно большом n подобными же рассуждениями выводится аналогичный факт: $r(v, n) < c$ равномерно по v, то первая часть основной леммы доказана.

Переходя к доказательству второй части, отметим сразу, что по лемме 2.1 функция $r_1(v, n)$ является при любом n неубывающей, а функция $r_2(v, n)$ — невозрастающей. Докажем, что, более того,— функция $\alpha_n = r_1(v, n) - \rho_1(v, n)$ при любом n является неубывающей, причем, если $v_1(n)$ — корень уравнения $\alpha_n(v) = 0$, то справа от него $\alpha_n(v)$ строго возрастает. Точно так же: функция $\beta_n(v) = r_2(v, n) - \rho_1(v, n)$ является невозрастающей, причем, если $v_2(n)$ — корень уравнения $\beta_n(v) = 0$, то слева от него функция $\rho_n(v)$ строго убывает.

Рекуррентное соотношение (1.5) в нашем случае может быть записано в виде

$$r_i(v, n) = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r_i(v + y, n + 1)\,dF_{\omega}(y)\,\xi_{v,n}(d\omega). \tag{2.10}$$

Поэтому из (2.5) получаем для α_n выражение

$$\alpha_n(v) = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \{r_1(v + y, n + 1) - \rho(v + y, n + 1)\}\,dF_{\omega}(y)\,\xi_{v,n}(d\omega) - c. \tag{2.11}$$

При $n \geqslant N_0(W, c, \xi)$ имеем

$$r_1(z, n + 1) - \rho(z, n + 1) = \begin{cases} 0, & z < v_0(n+1), \\ r_1(z, n + 1) - r_2(z, n + 1), & z \geqslant v_0(n+1), \end{cases}$$

где $v_0(n)$ — корень уравнения $r_1(v, n) = r_2(v, n)$, т. е. $r_1(z, n+1) - \rho(z, n+1)$ является неубывающей функцией. Но тогда при $v_1 < v_2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{r_1(v+y, n+1) - \rho(v_1+1, n+1)\}\, dF_\omega(y) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \{r_2(v_2+y, n+1) - \rho(v_2+y, n+1)\}\, dF_\omega(y), \qquad (2.12)$$

и ввиду того, что правая часть в этом неравенстве является монотонной неубывающей функцией от ω (по лемме 2.2), получаем, используя лемму 2.1 и соотношение (2.11), что $\alpha_n(v_1) \leqslant \alpha_n(v_2)$.

Если $v_1(n)$ — корень уравнения $\alpha_n(v) = 0$, то из (2.11) обнаруживаем существование такого множества Y_{n+1} положительной F_ω-меры при каждом ω, принадлежащем некоторому множеству Ω^* положительной ξ-меры, что $r_1(v+y, n+1) - \rho(v+y, n+1) \geqslant c$ при $y \in Y_{n+1}$, $v = v_1(n)$.

Поэтому неравенство (2.12) является строгим при $\omega \in \Omega^*$ и $v_1 = v_1(n)$ (сдвиг вправо интегрируемой монотонно возрастающей функции), так что в силу замечаний к леммам 2.1 и 2.2 будем иметь строгое неравенство $\alpha_n(v) > \alpha_n(v_1(n))$ при $v > v_1(n)$. Монотонный характер убывания $\beta_n(v)$ по v при $v \geqslant N_0$ доказывается аналогично.

Переходя к случаю $n < N_0$, будем считать доказанными указанные свойства монотонности при $n = k+1, \ldots, N_0 - 1$, N_0 и докажем их для $n = k$. Обозначив

$$A_n = \sup_v \{v\colon \alpha_n(v) \leqslant 0\},$$
$$B_n = \inf_v \{v\colon \beta_n(v) \leqslant 0\}, \qquad (2.13)$$

получаем, что

$$r_1(z, k+1) - \rho(z, k+1) = \begin{cases} 0, & z \leqslant A_{k+1}, \\ \alpha_{k+1}(z), & A_{k+1} < z \leqslant B_{k+1}, \\ r_1(z, k+1) - r_2(z, k+1), & z > B_{k+1}, \end{cases}$$

т. е. является неубывающей функцией, и рассуждения, аналогичные проведенным при $n \geqslant N_0$, завершают доказательство по индукции при $n < N_0$.

Построение указанных в формулировке леммы последовательностей, определяющих байесовские решения, теперь очевидно: пусть M такое, что $A_i \leqslant B_i$ при $i \leqslant M$ и $A_{M+1} > B_{M+1}$, положим $a_n = A_n$, $b_n = B_n$ $(n = 1, 2, \ldots, M)$. Из (2.13) и результатов § 1 следует, что каждая решающая функция, описанная в формулировке основной леммы, при таком выборе $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ является байесовским решением относительно $\{W, c, \xi\}$.

Замечание 1. Нетрудно видеть, что для ν (до T)-урезанных байесовских решений можно, при выполнении условий а) — г), провести без изменения рассуждения, сделанные при доказательстве второй части основной леммы, оперируя с $\rho_1^T(v, n)$ вместо $\rho_1(v, n)$, так как заведомо $\rho^T(v, n) = \rho_0(v, T)$, а при $n < T$ имеет место формула

$$\rho_1^T(v, n) = \int_\Omega \int_{-\infty}^{\infty} \rho^T(v+y, n+1)\, dF_\omega(y)\, \xi(d\omega) + c.$$

Поэтому существуют две последовательности $\{a_i^T;\ i=1,\ldots,M(T)\}$, $\{b_i;\ i=1,\ldots,M(T)\}$, определяющие ν(до T)-урезанные байесовские решения. Легко видеть, что

$$a_i^T \geqslant a_i, \quad b_i^T \leqslant b_i \ (i=1,\ldots,M(T) \leqslant M).$$

Замечание 2. Если вероятностная мера $\eta = \xi_{u,m}$, то, очевидно, $\eta_{v,n} = \xi_{v+u,n+m}$. Поэтому из основной леммы получаем способ построения байесовских решений сразу для семейства $\{\xi_{u,m}\}$ мер, рассматриваемых как априорные распределения. Для этого при данных u, m по (2.12) определим $A_i(u,m) = A_{m+i} - u$, $B_i(u,m) = B_{m+i} - u$, $i=1,\ldots,N_0-m$, а затем по ним построим последовательности $\{a_i(u,m)\}$, $\{b_i(u,m)\}$ подобно тому, как строились $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ по $\{A_i\}$ и $\{B_i\}$.

Заметим, что просто брать u,m-срезку решающей функции, являющейся байесовским решением относительно $\{W, c, \xi\}$, чтобы получить байесовское решение относительно $\{W, c, \xi_{u,m}\}$ — нельзя, так как может оказаться (см. § 3), что при некотором целом $k\,(0 \leqslant k \leqslant m)$ байесовские решения относительно $\xi_{y,k}$ при всех допустимых y принадлежат $\mathfrak{N}_W^0$.

Замечание 3. Ввиду неоднозначности (за счет возможного равенства $\rho_1(v,n) = \rho_0(v,n)$) построения байесовских решений по указанному в основной лемме способу, мы в последующем ограничимся наиболее геометрически суженными байесовскими решениями, а именно: если v, n — допустимая точка, и $\rho_1(v,n) = \rho_0(v,n)$, то, приходя в v, n, не будем делать $n+1$-е испытание, а примем окончательное решение. Очевидно, это замечание существенно для семейств (2.2) лишь в дискретном случае.

§ 3. Оптимальные методы статистического контроля (биномиальное семейство распределений)

В предположении, что объем проверяемых партий достаточно велик, можно сформулированную во введении задачу трактовать как построение байесовских решений для биномиального семейства распределений.

Положим (см. обозначения введения)

$$p_0 = \frac{B}{aN}, \quad c = \frac{C}{N}, \quad p_0 = \frac{X}{N}$$

и будем считать, что априорное распределение частоты появления партий с долей дефектных изделий X задано в виде функции распределения вероятностей $\Phi(p)$ на отрезке $[0,1]$.

Так как байесовское решение, очевидно, не изменяется при умножении функции убытка и стоимости одного испытания на одно и то же число, то, пренебрегая очисткой проверяемой части партии от дефектных изделий, можно представить (1) в виде

$$U_X[R] = N[pP(p) + p_0 Q(p) + cM_p\nu(x)],$$

где $P(p)$ — вероятность принять, а $Q(p)$ — вероятность отвергнуть партию с долей дефектных изделий p при использовании $R(x)$, и заключить, что задача сводится к построению байесовских решений для $\{W(p) = p - p_0, c, \Phi(p)\}$. Естественно считать $0 < p_0 < 1$, так как случаи $p_0 = 0$ и $p_0 = 1$ тривиальны.

Биномиальное семейство распределений имеет, очевидно, вид (2.2): $\mu(x)$ — дискретная мера, сосредоточенная в $x=0$ и $x=1$, а $\psi(\omega)=1-p$, где $e^{\omega}=\frac{p}{1-p}$. При $0\leqslant x\leqslant 1$ функция $h_x(p)=p^x(1-p)^{1-x}$ имеет единственный максимум в точке $p=x$. Поэтому, при условии, что p_0 является точкой роста слева и справа распределения $\Phi(p)$, мы заключаем из основной леммы, что каждое байесовское относительно $\{p-p_0, c, \Phi\}$ решение является урезанным по ν и представляет собой определенного вида многократную урезанную выборку. Выясним более подробно поведение границ $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$, определяющих соответствующие байесовские решения. Удобно положить $W_1(p)=p$, $W_2(p)=p_0$, и учитывая, что $x_1+\ldots+x_n$ принимает только целые неотрицательные значения, мы, в соответствии с определениями §§ 1 и 2, имеем для любых целых $k\geqslant 0$, $n\geqslant 0$ $(k\leqslant n)$

$$r_1(k,n)=\int_0^1 p\,d\Phi_{k,n}(p), \quad r_2(k,n)=p_0, \tag{3.1}$$

где

$$d\Phi_{k,n}(p)=\frac{p^k(1-q)^{n-k}\,d\Phi(p)}{\int_0^1 p^k(1-p)^{n-k}\,d\Phi(p)}. \tag{3.2}$$

В дальнейшем широко используется функция

$$M(y,t)=\frac{\int_0^1 p^{y+1}(1-p)^{t-y}\,d\Phi(p)}{\int_0^1 p^y(1-p)^{t-y}\,d\Phi(p)}, \tag{3.3}$$

определенная при всех $t\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, с помощью которой основное рекуррентное соотношение (2.5) записывается в виде

$$\rho_1(k,n)=M(k,n)\rho(k+1,n+1)-(1-M(k,n))\rho(k,n)+C. \tag{3.4}$$

Рассуждениями, аналогичными доказательству леммы 2.1, доказывается

Лемма 3. 1. *Если $\Phi(p)$ — невырожденное* распределение, то $M(y,t)$ строго возрастает по t при фиксированном y и строго убывает по y при фиксированном t.*

Поэтому функция $y_0(t)$, определяемая уравнением $M(y,t)=p_0$, строго возрастает.

Как указывалось в замечании 2.2, можно построить границы байесовских решений сразу для всего семейства

$$\{\Phi_{k,n}(p);\ n=0,1,\ldots;\ k\leqslant n\}. \tag{3.5}$$

Прибегнем к соответствующей геометрической иллюстрации. Так как функция $M(y,t)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$M(y,t)=M(y,t)M(y+1,t+1)-(1-M(y,t))M(y,t+1), \tag{3.6}$$

* То-есть не сосредоточенное в единственной точке.

в чем легко убедиться непосредственно или из (1.5), то приращение функции $y_0(t)$ на промежутке $[\tau, \tau+1]$ при любом τ не может превышать единицы. Поэтому $y_0(t)$ имеет только одну общую точку с границей области $G=\{(y, t), 0 \leqslant y \leqslant t\}$, разделяя G на две части: $G_1=\{(y, t), y \leqslant y_0(t)\}$ и $G_2=\{(y, t); y_0(t)<y\}$, которые естественно назвать зоной приемки и зоной браковки, так как $r_1(k, n)=M(k, n)$, $r_2(k, n)=p_0$.

Поставив точку с целочисленными координатами $(k, n) \in G$ в соответствие событию: среди n проверенных изделий обнаружено k дефектных, и обращаясь к замечанию 2.3, условимся относительно следующей терминологии, удобной при непосредственном вычислении границ и при составлении таблиц: точка $(k, n) \in G$ называется внутренней, если $\rho_1(k, n)<\rho_0(k, n)$, и внешней, если $\rho_1(k, n) \geqslant \rho_0(k, n)$; прямая $t=n$ называется n-й вертикалью, прямая $y=k$ — k-й горизонталью.

Используя соотношения (3.4), (3.6) и вспоминая, что

$$\rho_0(k, n)=\min\{r_1(k, n)=M(k, n),\ p_0\},$$

$$\rho(k, n)=\min\{\rho_1(k, n),\ \rho_0(k, n)\}, \tag{3.7}$$

легко обнаруживаем следующие свойства расположения внутренних и внешних точек:

1) Если $(k, n+1)$, $(k+1, n+1)$ — внешние и обе одновременно принадлежат либо G_1 либо G_2, то (k, n) — также внешняя.

2) Если на $n+1$-й вертикали нет внутренних точек, то на n-й вертикали может быть только одна внутренняя точка, причем, если (k, n) действительно внешняя, то необходимо $(k, n+1) \in G_1$, $(k+1, n+1) \in G_2$.

Пусть теперь выполнено условие:

точка p_0 является точкой роста слева
и справа функции распределения $\Phi(p)$. (3.8)

(Практически это означает, что партии с долей дефектных изделий p_0 и близкой к p_0 предъявляются к проверке достаточно часто.)

Тогда из основной леммы следует, что существует такое $N_0=N_0(p_0, c, \Phi)$, что все внутренние точки лежат слева от n-й вертикали.

Проводя теперь рассуждения, аналогичные доказательству второй части основной леммы, находим, что имеет место

Лемма 3.2. *На каждой вертикали функция $M(k, n)-\rho_1(k, n)$ является неубывающей по k, причем, если $M(k_0, n)-\rho_1(k_0, n) \geqslant 0$ при некотором k_0, то при $k>k_0$ она строго возрастает; на каждой горизонтали функция $M(k, n)-\rho_1(k, n)$ является невозрастающей по n, причем, если при некотором n_0 $M(k, n_0)-\rho_1(k, n_0) \geqslant 0$, то при $n<n_0$ она монотонно убывает.*

Отсюда и из (3.7), (3.4), (3.6), (3.8) вытекают такие свойства:

3) Если (k, n) — внутренняя, а (s, n) — внешняя, то обязательно $s<k$, если $(s, n) \in G_1$, и $s>k$, если $(s, n) \in G_2$.

4) Если (k, n) — внутренняя, а (k, s) — внешняя, то обязательно $s>n$, если $(k, s) \in G_1$, и $s<k$, если $(k, s) \in G_2$.

5) На каждой горизонтали и каждой вертикали между любыми двумя внутренними точками не может находиться внешняя.

6) Если $(k, n) \in G_1$ и является внешней, то все точки с целочисленными координатами, лежащие на и под прямой $y = t - (n_0 - k_0)$, являются внешними.

7) Если $(k, n) \in G_2$ и является внешней, а $(k, n+1)$ является внутренней, то $(k+1, n+1)$ также является внешней.

Доказательство свойств 1—6 несложно и мы его опускаем. Чтобы убедиться в справедливости свойства 7) заметим, что оно эквивалентно такому: рассмотрим весовую характеристику $W^* = p - p_0^*$ и априорное распределение $\Phi^*(p) = \Phi(1-p)$, где $p_0^* = 1 - p_0$, и пусть $(s, r) \in G_1$ является внешней, а $(s+1, r)$ является внутренней, тогда $(s, r+1)$ является внешней, — но это утверждение вытекает из второй части леммы 3.1.

Обозначим через $V = V(p_0, c, \Phi)$ множество всех внутренних точек области G для данных $\{p_0, c, \Phi(p)\}$. В соответствии с замечанием 2.3 мы можем по V определить наиболее суженное (геометрически) байесовское решение для $\{p_0, c, \Phi(p)\}$, а также суженные байесовские решения для семейства $\{\Phi_{r,m}(p)\}$.

Пусть на n-й вертикали имеются внутренние точки и (k^-, n) — самая нижняя из них, а (k^+, n) — самая верхняя; обозначим $A_n = k^- - 1$, $B_n = k^+ + 1$. Если же на этой вертикали нет внутренних точек, то полагаем $A_n = [y_0(n)]$, $B_n = [y_0(n)] + 1$. Последовательность $A_1, \ldots, A_N$ естественно назвать нижней, а последовательность $B_1, \ldots, B_N$ — верхней границей множества $V(p_0, c, \Phi)$ внутренних точек. Из приведенных свойств 1—7 и того факта, что $y_0(t)$ является возрастающей функцией, вытекает

Теорема 3.1. *Последовательности $\{A_i\}$ и $\{B_i\}$ являются неубывающими. При этом либо $A_i = A_{i-1}$, либо $A_i = A_{i-1} + 1$ и аналогично — либо $B_i = B_{i-1}$, либо $B_i = B_{i-1} + 1$.*

Искомое байесовское относительно $\{p_0, c, \Phi\}$ решение определится теперь так:

1) если $(0, 0) \overline{\in} V$, то решение о приемке (d_1) или браковке (d_2) принимают без испытаний, соответственно тому, чему равен $\rho_0 = \min\{M(0, 0), p_0\}$,

2) если $(0, 0) \in V$, то определим число l как наибольшее из тех L, для которых $B_i - A_i > 1$ при $i = 1, \ldots, L$, и положим $a_i = A_i$, $b_i = B_i$; $i = 1, \ldots, l+1$. Пока $a_i < k(i) = x_1 + \ldots + x_n < l_i$, производятся последовательно испытания; как только впервые $k(i) = a_i$ или $k(i) = b_i$,—испытания прекращаем и принимаем, соответственно, d_1 или d_2. Число испытаний до прихода к решению, очевидно, не может превысить $l+1$, так как $a_{l+1} = b_{l+1} - 1$.

Аналогичным образом строятся байесовские решения для каждого распределения $\Phi_{r,m}(p)$ по его множеству внутренних точек $V_{r,m}$, которое очевидным образом получается из V при параллельном переносе начала координат в точку (r, m).

Обращаясь к ν (до T)-урезанным байесовским решениям, отметим, что свойства 1—7 имеют место и для множества V_T соответствующих внутренних точек, если только $\Phi(p)$ обладает свойством (3.8).

Соответствующее рекуррентное соотношение для $\rho_1^T(k, n)$ имеет вид

$$\rho_1^T(k, n) = M(k, n)\rho^T(k+1, n+1) - (1 - M(k, n))\rho^T(k, n+1) + c,$$

$$\rho^T(k, n) = \min\{\rho_1^T(k, n), \rho_0(k, n)\};\ n = 0, \ldots, T;\ \rho^T(k, T) = \rho_0(k. T). \quad (3.9)$$

Очевидно, $V_T \subset V$, так как $\rho_1^T(k, n) \geqslant \rho_1(k, n)$.

Найдем, наконец, удобную оценку номера N_0 вертикали, справа от которой находится целиком множество V, так как, очевидно, приведенная в доказательстве основной леммы оценка является довольно грубой.

Обозначим через t_k корень уравнения $M(k, t) = p_0$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Ввиду свойства 2), необходимым условием, чтобы (k, n) была внутренней с максимальной абсциссой, является $k < y_0(n+1) < k+1$, т. е. выполнено соотношение

$$M(k, n)\, p_0 + (1 - M(k, n))\, M(k, n+1) + c < \rho_0(k, n). \tag{3.10}$$

Отсюда

$$M(k, n)\,[M(k+1, n+1) - p_0] > c, \quad \text{если } (k, n) \in G_1, \tag{3.11}$$

и

$$[1 - M(k, n)]\,[p_0 - M(k, n+1)] > c, \text{ если } (k, n) \in G_2. \tag{3.12}$$

В то же время, в силу леммы 3.1, имеем

$$M(k, n)\,[M(k+1, n+1) - p_0] \leqslant M(k, t_k)\,[M(k+1, t_k+1) - p_0]$$
при $(k, n) \in G_1$,

$$[1 - M(k, n)]\,[p_0 - M(k, n+1)] < [1 - M(k, t_k)]\,[p_0 - M(k, t_{k+1})]$$
при $(k, n) \in G_2$.

Но так как $M(k, t_k) = p_0$, а для функции $M(y, t)$ имеет место (3.6), то нетрудно подсчитать, что правые части в последних двух неравенствах равны $p_0[M(k+1, t_k+1) - p_0]$. Таким образом, при $p_0[M(k+1, t_k+1) - p_0] \leqslant c$ точка (k, n) при любом n не может быть точкой из V с максимальной абсциссой. Если теперь последовательность чисел $\alpha_k = M(k+1, t_k+1)$ — невозрастающая, то, положив $k_0 = \max\limits_k \{k;\ p_0(k+1, t_k+1) - p_0] > c\}$, находим, что t_{k_0} является хорошей оценкой для максимальной абсциссы множества V. Остается доказать, что справедлива

Лемма 3.3. *Последовательность $\{\alpha_k\}$ невозрастающая. Если $\Phi(p)$ удовлетворяет условию* (3.8), *то α_k строго убывает.*

Доказательство. В силу определения чисел t_k $(k = 0, 1, \ldots)$

$$\alpha_k = \frac{1}{p_0} \frac{\int_0^1 p^{k+2}(1-p)^{t_k - k}\, d\Phi(p)}{\int_0^1 p^k (1-p)^{t_k - k}\, d\Phi(p)}.$$

Таким образом, положив $A_k = \int_0^1 p^k (1-p)^{t_k - k}\, d\,\Phi(p)$, находим, что

$$\alpha_k - \alpha_{k+1} = \frac{1}{p_0} \int_0^1 \frac{p^{k+2}(1-p)^{t_k - k}}{A_k} \left[1 - \frac{A_k}{A_{k+1}}\, p\,(1-p)^{t_{k+1} - t_k - 1}\right] d\Phi(p). \tag{3.13}$$

Введем функцию

$$\Psi(x) = \int_0^x d\Phi_{k, t_k}(p) - \int_0^x d\Phi_{k+1, t_{k+1}}. \tag{3.14}$$

Очевидно $\int_0^1 d\Psi(x) = 0$, $\int_0^1 x\, d\Psi(x) = p_0 - p_0 = 0$. Используя (3.13) и (3.14), замечаем, что для доказательства леммы достаточно показать, что $\int_0^1 x^2\, d\Psi(x) \geqslant 0$. Для невырожденного распределения $\Phi(p)$ из (3.6) обнаруживаем, что $t_{k+1} - t_k > 1$. Отсюда следует, что существуют два таких числа $0 < \alpha < \beta < 1$, что функция $1 - \frac{A_k}{A_{k+1}} p(1-p)^{t_{k+1}-t_k-1}$ положительна при $0 < p < \alpha$, отрицательна при $\alpha < p < \beta$ и положительна при $\beta < p < 1$. Таким образом, существует такое число γ, $\alpha < \gamma < \beta$, что $\Psi(x) \geqslant 0$ при $x < \gamma$ и $\Psi(x) \leqslant 0$ при $x > \gamma$. Поэтому

$$\int_0^1 x\Psi(x)\, dx \leqslant 0 \tag{3.15}$$

(в случае, если $\Phi(p)$ удовлетворяет (3.8), здесь строгое неравенство). Теперь проинтегрируем по частям:

$$\int_0^1 x^2\, d\Psi(x) = -\int_0^1 x\Psi(x)\, dx,$$

чем, в силу (3.15), и завершается доказательство леммы.

Интересно отметить, что область V не обязательно связная, т. е. могут чередоваться вертикали с внутренними точками и без них. Это объясняется дискретностью задачи, как по n, так и по k.

§ 4. Байесовские решения для процесса Пуассона и их использование для аппроксимации оптимальных методов статистического контроля

Построение оптимальных методов контроля с помощью рекуррентных соотношений (3.9) является весьма громоздким при малом c. Однако, при этом условии можно осуществить аппроксимацию с помощью байесовских решений для процессов с непрерывным временем. Наиболее интересный для практики случай, когда ущерб от приемки негодного изделия значительно превосходит убыток от забраковки изделия и когда в достаточном количестве поступают партии с малым содержанием брака, допускает аппроксимацию с помощью байесовских решений для процесса Пуассона.

Общего описания байесовских решений для процессов с непрерывным временем не имеется. Заметим, что для процесса Пуассона оптимальный выбор между решениями рассматривался в работе [8], но только для задач о конкуренции двух гипотез и об оценке параметра.

Мы строим ниже байесовские решения при выборе между двумя решениями для процесса Пуассона с помощью предельного перехода от дискретного случая. Указываются широкие условия, при которых байесовское решение является урезанным по t, и выводятся дифферен-

циальные уравнения для функции риска продолжения наблюдений, благодаря чему возможен простой способ построения границ байесовских решений.

Итак, пусть наблюдается процесс Пуассона $x(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant +\infty)$, т. е. непрерывный слева процесс с независимыми стационарными приращениями, монотонно возрастающий единичными скачками, причем $x(0) = 0$ и вероятность того, что за время (t_1, t_2) произойдет ровно k скачков, равна

$$P_\lambda \{x(t_2) - x(t_1) = k\} = \frac{\lambda^k (t_2 - t_1)^k}{k!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)}. \tag{4.1}$$

Пусть параметр λ неизвестен и требуется произвести оптимальный выбор между двумя решениями d_1 и d_2, если стоимость наблюдения процесса за время t есть $ct\,(c > 0)$, известны функции убытка $W(\lambda, d)$ и априорное распределение $\Phi(\lambda)$ параметра λ.

Обозначим через $\mathfrak{X}$ совокупность всех «траекторий» процесса, т. е. множество всех монотонно возрастающих только единичными скачками функций $x(t)$. Пусть $\mathfrak{B}$ — минимальное борелевское поле подмножеств из $\mathfrak{X}$, содержащее все цилиндры с конечномерными основаниями. Решающей функцией $R[x(t)]$ называем пару функционалов $\{d[x(t)], \tau[x(t)]\}$, определенных на $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{B}$-измеримых и удовлетворяющих условиям:

1) $d[x(t)]$ принимает значения d_1 и d_2; $\tau[x(t)]$ принимает неотрицательные вещественные значения;

2) если $\tau[x(t)] = \tau_0$ и $x'(t)$ из $\mathfrak{X}$ такова, что $x'(t) = x(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant \tau$, то $\tau[x'(t)] = \tau_0$ и $d[x'(t)] = d[x(t)]$.

Убыток, определяемый решающей функцией R, есть

$$u[R] = \int_0^\infty \int_{\mathfrak{X}} W(\lambda, d[x(t)])\, P_\lambda(dx(t))\, d\Phi(\lambda) + c \int_0^\infty \int_{\mathfrak{X}} \tau[x(t)]\, P_\lambda(dx(t))\, d\Phi(\lambda), \tag{4.2}$$

где P_λ — мера, построенная на $\mathfrak{B}$ по (4.1).

Введем понятие регулярной решающей функции. Пусть T^2 — совокупность всех чисел вида $t = \frac{m}{2^r}$ $(m, r = 0, 1, \ldots)$. Пусть $\Delta > 0$ — произвольное фиксированное число из T^2. Обозначим через $\mathfrak{R}^\Delta$ множество всех решающих функций, у которых остановка наблюдений и выбор между d_1 и d_2 производится только в моменты времени, кратные Δ.

Решающая функция R называется регулярной, если существует такая последовательность $R_{\Delta_1}, R_{\Delta_2}, \ldots (\Delta_i \in T^2;\ i = 1, 2, \ldots)$ решающих функций $R_{\Delta_i} \in \mathfrak{R}^{\Delta_i}$, что

$$u[R_{\Delta_i}] \to u[R], \text{ когда } i \to \infty. \tag{4.3}$$

Обозначим через $\tilde{\mathfrak{R}}$ — множество всех регулярных решающих функций.

Определение. *Байесовским решением относительно* $\{W, c, \Phi\}$ называется такая решающая функция $\hat{R}$ из $\tilde{\mathfrak{R}}$, что для всякой другой $R \in \tilde{\mathfrak{R}}$ будет $u[\hat{R}] \leqslant u[R]$.

Теорема 4.1. *Пусть весовая характеристика* $W(\lambda) = W(\lambda, d_1) - W(\lambda, d_2)$ *— неубывающая функция и существует точка* λ_0, *являющаяся точкой роста слева и справа априорного распределения* $\Phi(\lambda)$ *и такая, что* $W(\lambda)$ *непрерывна в* λ_0 *и строго возрастает в некотором интервале* $(\lambda_0 - a, \lambda_0 + a)$, $a > 0$. *Пусть, далее, при всех* $\delta > 0$ *и некоторых достаточно больших* K *и* T *существуют* $\int_0^\infty W(\lambda) d\Phi_{K,\delta}(\lambda)$, $\int_0^\infty W(\lambda)\, d\Phi_{0,T}(\lambda)$ *и* $\int_0^\infty \lambda\, d\Phi_{K,\delta}(\lambda)$, *где* $\Phi_{x,t}$ *определена ниже* (4.5). *Тогда существует байесовское решение* $\hat{R}$ *относительно* $\{W, c, \Phi\}$, *являющееся урезанным по* τ, *и если* $\hat{\tau}[x(t)] \neq 0$, *то* $\hat{R}$ *определяется двумя ограниченными функциями* $a(t) < b(t)$, *монотонно возрастающими только целочисленными скачками: процесс наблюдается, пока* $a(t) < x(t) < b(t)$. *Как только* $x(t) \leqslant a(t)$ *или* $x(t) \geqslant b(t)$ *— наблюдения прекращаются и принимается, соответственно,* d_1 *или* d_2.

Доказательство. Если $R_\Delta \in \mathfrak{R}^\Delta$, то, очевидно, R_Δ эквивалентна последовательному выбору между двумя решениями при наблюдении случайной величины, распределенной по закону Пуассона с параметром $\lambda\Delta$. Поэтому, в силу условий творемы и основной леммы § 2, существует решающая функция $\hat{R}_\Delta \in \mathfrak{R}^\Delta$, для которой $u[\hat{R}_\Delta] \leqslant u[R]$ при всех $R \in \mathfrak{R}^\Delta$. При этом $\hat{R}_\Delta$ определяется двумя последовательностями чисел

$$\begin{aligned} &a^\Delta(\Delta) \leqslant a^\Delta(2\Delta) \leqslant \ldots \leqslant a^\Delta(M_\Delta \Delta), \\ &b^\Delta(\Delta) \leqslant b^\Delta(2\Delta) \leqslant \ldots \leqslant b^\Delta(M_\Delta \Delta) \end{aligned} \tag{4.4}$$

следующим образом. Наблюдаем процесс в моменты времени $t = m\Delta$ $(m = 1, \ldots)$. Пока $a^\Delta(t) < x(t) < b^\Delta(t)$, продолжаем наблюдения; как только $x(t) \leqslant a^\Delta(t)$ или $x(t) \geqslant b^\Delta(t)$ наблюдения прекращаем и принимаем, соответственно, d_1 или d_2.

Положим $\Delta(s) = \frac{1}{2^s}$. Очевидно, $\mathfrak{R}^{\Delta(s)} \subset \mathfrak{R}^{\Delta(s+1)}$, поэтому $u[\hat{R}_{\Delta(s+1)}] \leqslant u[\hat{R}_{\Delta(s)}]$. При целом $r > 0$ и $s > r$ определим в точках вида $t = \frac{m}{2^r}$ $(m = 0, 1, \ldots)$ функции $a^s(t)$ и $b^s(t)$, $(s \geqslant r)$ по правилу

$a^s(t) = a^{\Delta(s)}(m2^{s-r}\Delta(s))$, $b^s(t) = b^{\Delta(s)}(m2^{s-r}\Delta(s))$, если $m2^{s-r} \leqslant M_{\Delta(s)}\Delta(s)$,
$a^s(t) = a^{\Delta(s)}(M_{\Delta(s)}\Delta(s))$, $b^s(t) = b^{\Delta(s)}(M_{\Delta(s)}\Delta(s))$ при $m2^{s-r} > M_{\Delta(s)}\Delta(s)$.

Покажем, что $a^{s+1}(t) \leqslant a^s(t)$, $b^{s+1}(t) \geqslant b^s(t)$.

Действительно, из способа построения байесовских решений для дискретного случая следует, что $a^s(t)$ при $t \leqslant M_{\Delta(s)}\Delta(s)$ есть наибольшее из тех x $(x = 0, 1, \ldots)$, для которых риск продолжения испытаний $\rho_1^s(x, t)$, вычисленный по всем решающим функциям из $\mathfrak{R}^{\Delta(s)}$ при условии, что значение процесса в момент t есть x, будет больше, чем риск принятия первого решения $r_1(x, t)$, вычисленный при том же условии, причем дополнительно $r_1(x, t) < r_2(x, t)$. Если таких x не существует, то $a(t) = -1$.

Аналогично, $b^s(t)$ есть наименьшее из тех x, при которых $\rho_1^s(x, t) <$

$< r_2(x, t)$, причем $r_2(x, t) < r_1(x, t)$. В самом деле, $\rho_1^s(x, t) = \tilde{\rho}_1^s(x, 2^{s-\tau}m)$, где, $\tilde{\rho}_1^s(x, n)$ есть риск продолжения испытаний, при условии, что при n испытаниях над величиной, распределенной по закону Пуассона с параметром $\frac{\lambda}{2^s}$, сумма значений ее, полученных в испытаниях, равна x; точно так же, апостериорное распределение $\tilde{\Phi}_{x,\ 2^{s-\tau}m}(\lambda)$, вычисленное при этом условии, совпадает с апостериорным распределением $\Phi_{x,t}$, вычисленным при условии, что $x(t) = x$. Но так как $\Re^{\Delta(s)} \subset \Re^{\Delta(s+1)}$, то $\rho_1^s(x, t) \geqslant \rho_1^{s+1}(x, t)$, откуда и следует наше утверждение.

Заметим, что из доказанной монотонности следует, что $M_s = M_{\Delta(s)}\Delta(s)$ также монотонно не убывает по s.

Обозначим $\overline{a}(t) = \lim\limits_{s\to\infty} a^s(t)$, $\overline{b}(t) = \lim\limits_{s\to\infty} b^s(t)$. Функции $\overline{a}(t) < \overline{b}(t)$ определены теперь на множестве T^2 и монотонно возрастают только целочисленными скачками. Мы покажем, что в условиях нашей теоремы $\overline{b}(t)$ является ограниченной, и, следовательно, $\overline{a}(t)$ и $\overline{b}(t)$ однозначно определяют две монотонные функции $a(t)$ и $b(t)$, определенные при всех $t \geqslant 0$, ввиду того, что T^2 всюду плотно на полуоси $t \geqslant 0$. Искомая решающая функция $\hat{R}$ и будет определяться кривыми $a(t)$ и $b(t)$ способом, описанным в условии теоремы.

Для каждого $x \geqslant 0$ и $t \geqslant 0$ определим функцию распределения

$$d\Phi_{x,t}(\lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda t}\, d\Phi(\lambda)}{\int\limits_0^\infty \lambda^x e^{-\lambda t} d\Phi(\lambda)}. \tag{4.5}$$

Очевидно, при x целом $\Phi_{x,t}(\lambda)$ есть апостериорное распределение, при условии, что $x(t) = x$.

Без ограничения общности

$$r_1(x, t) = \int\limits_{\lambda_0}^{\infty} W(\lambda)\, d\Phi_{x,t}(\lambda), \quad r_2(x, t) = -\int\limits_0^{\lambda_0} W(\lambda)\, d\Phi_{x,t}(\lambda).$$

В силу леммы 2.1 $r_1(x, t)$ строго убывает по t при фиксированном x и строго возрастает по x при фиксированном t. Для $r_2(x, t)$, аналогично, имеем противоположный характер монотонности. Поэтому существует кривая, определяемая уравнением $r_1(y(t), t) = r_2(y(t), t)$, разделяющая зоны приемки решений d_1 и d_2. Нетрудно убедиться, что $y(t)$ строго возрастает.

Пусть T_s — множество всех чисел вида $t = \frac{m}{2^s}$ $(m = 0, 1, \ldots)$. Точку (k, t) $(k = 0, 1, \ldots, t \in T_s)$ назовем s-внутренней, если $\rho_1^s(k, t) < \rho_0(k, t) = \min\{r_1(k, t), r_2(k, t)\}$, и s-внешней, если $\rho_1^s(k, t) \geqslant \rho_0(k, t)$. Очевидно, знание всех внутренних точек дает возможность определить байссовские решения $\hat{R}_{\Delta(s)}$ как относительно $\Phi(\lambda)$, так и относительно $\Phi_{k,t}(\lambda)$. Пусть V_s — совокупность всех s-внутренних точек. В силу результатов § 2 множество V_s состоит из «отрезков»

$$I_{k,s} = \{(k, t);\ t_{k,s}^- \leqslant t \leqslant t_{k,s}^+,\ t \in T_s\},$$

причем $t^-_{k,s} \leqslant t^-_{k+1,s}$, $t^+_{k,s} \leqslant t^+_{k+1,s}$ и множество $\{t^+_{k,s}\}$ является ограниченным. Обозначим $\alpha_s = \max\limits_k t^+_{k,s}$.

Так как $\rho_1^{s+1}(k,\ t) \leqslant \rho_1^s(k,\ t)$, то $V_s \subset V_{s+1}$ и при этом $t^-_{k,s+1} \leqslant t^-_{k,s}$, $t^+_{k,s} \leqslant t^+_{k,s+1}$. Обозначим через α предел при $s \to \infty$ (конечный или бесконечный) последовательности $\{\alpha_s\}$ и, аналогично $t^-_k = \lim\limits_{s\to\infty} t^-_{k,s}$, $t^+_k = \lim\limits_{s\to\infty} t^+_{k,s}$. Через I_k обозначим отрезок $[t^-_k,\ t^+_k]$ и пусть $V = \bigcup\limits_k I_k$. Точки из V будем называть внутренними. Легко показать, что V однозначно определяет кривые $a(t)$ и $b(t)$. А именно: пусть j есть максимальное из тех k, для которых $t^+_k > t^-_{k+1}$,— тогда $b(t)$ равно числу тех t^-_i; $i = 0,\ 1,\ \ldots$, которые не превосходят t, при $t \leqslant t_j$ и равно $j+1$ при $t > t_j$; а $a(t)$ равно -1 при $t < t^+_0$, равно числу тех t_i $(i = 1,\ 2,\ \ldots)$, которые не превосходят t при $t \leqslant t_j$, и j при $t > t_j$.

Докажем, что α — конечно и V состоит только из конечного числа отрезков I_k.

В силу ограниченности V_s по координате t, функция $\rho_1^s(k,\ t)$ однозначно определяется во всех точках $(k,\ t)$ $(k = 0,\ 1,\ \ldots,\ t \in T_s;\ t \leqslant \alpha_s)$ рекуррентным соотношением

$$\rho_1^s(k,\ t) = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^s(k+i,\ t + \Delta(s)) \int_0^{\infty} \frac{(\lambda\Delta(s))^i}{i!}\, d\Phi_{k,t}(\lambda) + c\Delta(s), \qquad (4.6)$$

где $\rho^s(k,\ t) = \min\{\rho_1^s(k,\ t),\ \rho_0^s(k,\ t)\}$ и $\rho^s(k,\ \alpha_s) = \rho_0^s(k,\ \alpha_s)$.

Докажем предварительно две леммы.

Лемма 4.1. *Пусть $f(\lambda)$ — функция, непрерывная в точке λ_0, являющейся точкой роста слева и справа распределения $\Phi(\lambda)$, и пусть при некотором $T \geqslant 0$ существует*

$$\int_0^{\infty} f(\lambda)\, d\Phi_{\lambda_0 T,\, T}(\lambda);$$

тогда при $\dfrac{k}{t} = \lambda_0$ и $t \to \infty$

$$\int_0^{\infty} f(\lambda)\, d\Phi_{k,t}(\lambda) \to f(\lambda_0).$$

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать лемму для случая $f(\lambda_0) = 0$. Но тогда, учитывая, что единственный максимум функции $\lambda^{\lambda_0} e^{-\lambda}$ осуществляется при $\lambda = \lambda_0$, можно провести доказательство цепочкой неравенств, аналогичной (2.9), учитывая только, что в силу непрерывности $f(\lambda)$ число c_1 в (2.9) теперь можно выбрать сколь угодно малым.

Лемма 4.2. *Пусть $f(\lambda)$ — неубывающая функция, удовлетворяющая условиям леммы 4.1 и строго возрастающая в некоторой окрестности $(\lambda_0 - \varepsilon,\ \lambda_0 + \varepsilon)$ точки $\lambda_0 > 0$. Тогда необходимым и достаточным условием сходимости $\int\limits_0^{\infty} f(\lambda)\, d\Phi_{k,\tau_k}(\lambda)$ к $f(\lambda_0)$ при $k \to \infty$ и монотонном возрастании τ_k является следующее: для любого положительного $\delta < \varepsilon$ существует такое $K(\delta)$, что при $k > K(\delta)$*

$$\lambda_0(1-\delta) < \frac{k}{\tau_k} < \lambda_0(1+\delta). \qquad (4.7)$$

Достаточность. В силу свойств функции $f(\lambda)$

$$\int_0^\infty f(\lambda)\, d\Phi_{\lambda_0(1-\delta)\tau_k,\tau_k}(\lambda) \leqslant \int_0^\infty f(\lambda)\, d\Phi_{k,\tau_k}(\lambda) \leqslant \int_0^\infty f(\lambda)\, d\Phi_{\lambda_0(1+\delta)\tau_k,\tau_k}(\lambda). \quad (4.8)$$

Но при $k \to \infty$ из (4.7) также будет и $\tau_k \to \infty$, поэтому левая и правая части (4.8) стремятся при достаточно малом δ к $f(\lambda_0)(1-\delta))$ и $f(\lambda_0(1+\delta))$ соответственно; но функция $f(\lambda)$ непрерывна в точке λ_0.

Необходимость. Предположим противное: пусть существуют положительное $\delta < \varepsilon$ и такая возрастающая последовательность $\{k_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$, что $k_i/\tau_{k_i} \geqslant \lambda_0(1+\delta)$, но тогда $\tau_{k_i} \to \infty$ и, значит,

$$\int_0^\infty f(\lambda)\, d\Phi_{k_i,\tau_{k_i}} \geqslant \int_0^\infty f(\lambda)\, d\Phi_{\lambda_0(1+\delta)\tau_{k_i},\tau_{k_i}},$$

однако правая часть по лемме 4.1 стремится к $f(\lambda_0(1+\delta))$, что в силу строгого возрастания $f(\lambda)$ в $(\lambda_0-\varepsilon,\ \lambda_0+\varepsilon)$ приводит к противоречию.

Теперь, так как кривая $y(t)$ определяется уравнением

$$\int_0^\infty W(\lambda)\, d\Phi_{y(t),t}(\lambda) = 0,$$

заключаем по лемме 4.2, что последовательность t_k, начиная с некоторого k, удовлетворяет условию

$$\lambda_0(1-\delta) < \frac{k}{\tau_k} < \lambda_0(1+\delta), \quad (4.9)$$

для некоторого $\delta > 0$.

Учитывая же, что $t^-_{k,s} < t_k < t^+_{k,s}$, находим, что V_s состоит только из конечного числа отрезков $I_{k,s}$. Если мы теперь докажем, что V состоит из конечного числа отрезков I_k, то из (4.9) будет следовать конечность α, т. е. ограниченность множества V по координате t. Из соотношений (2.12) мы имеем при $t \in T_s$

$$r_i(k, t) = \sum_{j=0}^\infty r_i(k+j, t+\Delta) \int_0^\infty \frac{(\lambda\Delta)^j}{j!}\, d\Phi_{k,t}(\lambda);\ i = 1, 2.$$

Учитывая это, а также условие теоремы и (4.6), получаем при $0 \leqslant k < K$, $0 < t < T$, $t \in T_s$ соотношения

$$r_i(k, t) = [1 - \Lambda(k, t)\Delta]\, r_i(k, t+\Delta) + \\ + \Delta\Lambda(k, t)\, r_i(k+1, t+\Delta) + o(\Delta)_i, \quad (4.10)$$

$$\rho^s_1(k, t) = [1 - \Lambda(k, t)\Delta(s)]\, \rho^s(k, t+\Delta(s)) + \\ + \Delta(s)\Lambda(k, t)\rho^s(k+1, t+\Delta(s)) + c\Delta(s) + o(\Delta(s))_\rho. \quad (4.11)$$

Пусть теперь $k_0(s)$ — номер самого верхнего отрезка. Из (4.10) и (4.11) находим, что при достаточно большом s необходимым условием, чтобы число t из T равнялось $t^+_{k_0(s),s}$ является

$$\Delta_s \Lambda(k_0(s), t)[r_1(k_0(s)+1, t+\Delta(s)) - r_2(k_0(s), t+\Delta(s))] > c\Delta(s) + \\ + o(\Delta(s))_2 - o(\Delta(s))_1. \tag{4.12}$$

Выражение, стоящее справа, монотонно убывает по t вследствие свойств монотонности функций Λ и r_i (k, t). В то же время $k_0(s)$ может только возрастать при росте s. А так как из соотношения (4.10) нетрудно убедиться, что $r_i(k, t)$ являются функциями непрерывными при $0 \leqslant k < K$, $0 < t < T$, то, сокращая обе части (4.12) на $\Delta(s)$ и переходя к пределу при $s \to \infty$, находим, что $k_0(s) \leqslant M$, если только при $k > M$ выполнено условие

$$\Lambda(k, t_k)[r_1(k+1, t_k) - r_2(k+1, t_k)] \leqslant c. \tag{4.13}$$

Покажем теперь, что левая часть в (4.13) стремится к нулю, когда $k \to \infty$, откуда и будет следовать урезанность $\hat{R}$. В самом деле, так как t_k определяется уравнением

$$\int_0^\infty W(\lambda)\, d\Phi_{k,t_k}(\lambda) = 0,$$

то нетрудно извлечь из леммы 4.2, что

$$\Lambda(k, t_k) = \int_0^\infty \lambda d\Phi_{k,t_k}(\lambda) \to \lambda_0 \quad \text{при } k \to \infty$$

и (4.14)

$$r_1(k+1, t_k) - r_2(k+1, t_k) = \int_0^\infty W(\lambda)\, d\Phi_{k+1,t_k}(\lambda) \to 0.$$

Таким образом, V состоит из конечного числа отрезков I_k. Обозначив через I_{k_0} самый верхний отрезок, заключаем, что в условии теоремы достаточно положить $K = k_0 + 1$, $T = \alpha$. Убедимся, что $\hat{R}$ является байесовским решением.

Построим по $\hat{R}$ при $\Delta \in T^2$, $\Delta > 0$ решающую функцию $\hat{R}_\Delta \in \mathfrak{R}^\Delta$ следующим образом: наблюдаем процесс, пока $a(m\Delta) < x(m\Delta) < b(m\Delta)$; как только впервые $a(m\Delta) \leqslant x(m\Delta)$ или $b(m\Delta) \geqslant x(m\Delta)$ — наблюдения прекращаем и принимаем d_1 или d_2, соответственно.

В силу ограниченности $\hat{R}$ по t и k, легко можно показать, что $u[\hat{R}] = u[\widetilde{R}_\Delta] + O(\Delta)$. С другой стороны, можно найти такое s, что Δ кратно $\Delta(s)$, и поэтому $u[\hat{R}_{\Delta(s)}] \leqslant u[\widetilde{R}_\Delta]$. Следовательно $u[\hat{R}_{\Delta(s)}] \to u[\hat{R}]$, монотонно убывая при $s \to \infty$. В то же время $u[\hat{R}_{\Delta(r)}] \leqslant u[R]$, если $R \in \mathfrak{R}_{\Delta(s)}$, откуда и следует, что $u[\hat{R}] \leqslant u[R]$, если $R \in \mathfrak{R}$, ч. и т. д..

Обозначим через T_k пересечение множеств I_k и T^2 и для каждого $t \in T_k$ обозначим $\bar{\rho}_1(k, t)$ предел монотонно убывающей при $s \to \infty$ последовательности $\rho_1^s(k, t)$ $\left(s \geqslant r, \text{ если } t = \frac{m}{2^r}\right)$.

Теорема 4.2. *Если выполнены условия теоремы* 4.1, *то, для любого* $\delta > 0$, *определенная на* T_k *функция* $\bar{\rho}_1(k, t)$ *во всех точках* $t \in T_k$, $t \geqslant \delta$

совпадает со значениями функции $\rho_1(k, t)$, *определенной на* V *рекуррентно дифференциальными уравнениями*:

$$\frac{d\rho_1(k, t)}{dt} + \Lambda(k, t)[\rho(k+1, t) - \rho_1(k, t)] + c = 0, \qquad (4.15)$$

$$\rho_1(k, t_k^+) = r_1(k, t_k^+), \quad k \leqslant k_0$$

где обозначено $\rho(k, t) = \min\{\rho_1(k, t), \rho_0(k, t)\}$.

При этом, если $t_k^- > 0$, *то*

$$\rho_1(k, t_k^-) = r_2(k, t_k^-). \qquad (4.16)$$

Доказательство. Зафиксируем $\delta > 0$ и убедимся вначале в непрерывности $\bar{\rho}_1(k, t)$ на T_k при $t \geqslant \delta$. Пусть $t, t+h \in T_k$, тогда из (4.11)

$$\bar{\rho}_1^s(k, t+h) - \bar{\rho}_1^s(k, t) =$$

$$= \Delta(s) \sum_{i=1}^{\left[\frac{h}{\Delta(s)}\right]} \Lambda(k, t+\Delta(s)(i-1))[\bar{\rho}_1^s(k, t+\Delta(s)i) - \qquad (4.17)$$

$$- \rho(k+1, t+\Delta(s)i)] - ch + o(h),$$

и, в силу равномерной ограниченности функций $\Lambda(k, t)$ и $\rho(k+1, t)$ на отрезке $[\delta, \alpha]$ для всех достаточно больших s $\rho_1^s(k, t+h) - \rho_1^s(k, t) < Ah$ ($A = \text{const}$). Поскольку T_k всюду плотно на I_k, то можно $\rho_1(k, t)$ однозначно продолжить до непрерывной функции $\rho_1(k, t)$, определенной на I_k. Из (4.17), переходя к пределу при $s \to \infty$ и воспользовавшись теоремой Лебега, получим

$$\rho_1(k, t+h) - \rho_1(k, t) =$$

$$= \int_0^h \Lambda(k, t+\tau)[\rho_1(k, t+\tau) - \rho(k+1, t+\tau)]\,d\tau - ch + o(h). \qquad (4.18)$$

Разделив обе части (4.18) на h и переходя к пределу при $h \to 0$, находим, что $\rho_1(k, t)$ удовлетворяет уравнению (4.15). Начальные условия $\rho_1(k, t_k^+) = r_1(k, t_k^+)$ выполнены ввиду

$$\rho_1^s(k, t_{k,s}^+) < r_1(k, t_{k,s}^+), \ \rho_1^s(k, t_{k,s}^+ + \Delta(s)) \geqslant r_1(k, t_{k,s}^+ + \Delta(s)).$$

Записав аналогичное неравенство для $t_{k,s}^- > 0$, получим $\rho_1(k, t_k^-) = r_2(k, t_k^-)$.

Доказанная теорема дает простой и эффективный способ построения множества V внутренних точек. Вначале находим k_0, как наибольшее из тех k, для которых выполнено соотношение, противоположное (4.13). Правый конец $t_{k_0}^+$ верхнего отрезка I_{k_0} ищем как корень уравнения

$$\Lambda(k, t_{k_0}^+)[r_1(k_0+1, t_{k_0}^+) - r_2(k_0+1, t_{k_0}^+)] = c. \qquad (4.19)$$

Для определения t_k^- решаем уравнение (4.15) с начальным условием $\rho_1(k_0, t_{k_0}^+) = r_1(k, t_{k_0}^+)$ и находим t_k^- из (4.16) (либо полагаем $t_k^- = 0$, если $\rho_1(k, t) > r_2(k, t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_k$).

Переходя к следующему уравнению, ищем $t^+_{k_0-1}$ как корень уравнения

$$\Lambda(k_0-1,\ t^+_{k_0-1})\,[\rho(k_0,\ t^+_{k_0-1}) - r_1(k_0,\ t^+_{k_0-1})] = c,$$

решаем уравнение (4.15) при $k = k_0 - 1$ и т. п. Способ этот однозначно определяет V ввиду свойств монотонности функций $r_1(k,\ t)$ и $r_2(k,\ t)$ и легко устанавливаемой справедливости уравнений

$$\frac{dr_i}{dt} + \Lambda(k,\ t)\,[r_i(k+1,\ t) - r_i(k,\ t)] = 0 \qquad (i = 1,\ 2).$$

Заметим, что при расчете границ байесовских решений, соответствующих приемочному контролю, удобнее полагать $r_2(k,\ t) = \lambda_0 = \text{const}$, $r_1(k,\ t) = \Lambda(k,\ t)$. Нахождение k_0 облегчается здесь еще тем, что $\Lambda(k,\ t_k) = \lambda_0$ и функция $\Lambda(k+1,\ t_k)$ стремится к λ_0, монотонно убывая.

Теорема 4.3. *Пусть* $W_N(p)$ $(0 \leqslant p \leqslant 1)$ *при каждом* $N = 1, 2, \ldots$ *есть неубывающая функция, для которой существует корень* $p_0(N)$ *уравнения* $W_N(p) = 0$, *являющийся точкой роста слева и справа функции распределения* $\Phi_N(p)$, *и пусть последовательность функций* $\widetilde{W}_N(\lambda) = NW_N(\lambda/N)$ *сходится к функции* $W(\lambda)$ *равномерно на любом конечном отрезке полуоси* $0 \leqslant \lambda < +\infty$, *а последовательность* $\widetilde{\Phi}_N(\lambda) = \Phi_N(\lambda/N)$ *сходится в основном к функции* $\Phi(\lambda)$. *Пусть, далее, существует* $\lambda_0 = \lim\limits_{N\to\infty} Np_0(N)$ *и* $W(\lambda)$, $\Phi(\lambda)$ *и* λ_0 *удовлетворяют условиям теоремы* 4.1.

Если последовательность $\{c_N\}$ *такова, что* $N^2c_N \to c$, *а* $\{a^N_n\}$ *и* $\{b^N_n\}$ — *последовательности чисел, определяющих байесовское относительно* $\{W_N(p),\ c_N,\ \Phi_N(p)\}$ *решение для биномиального распределения, то при* $n/N \to t$, *когда* $N \to \infty$, $a^N_n \to a(t)$, $b^N_n \to b(t)$, *где* $a(t)$ *и* $b(t)$ — *границы, определяющие байесовское относительно* $\{W(\lambda),\ c,\ \Phi(\lambda)\}$ *решение для процесса Пуассона.*

Доказательство. Повторяя рассуждения § 3, нетрудно убедиться, что при каждом N совокупность внутренних точек V_N для $\{W_N(p),\ c_N, \Phi_N(p)\}$ состоит из конечного числа «отрезков»

$$I^N_k = \{(k,\ n);\ n^-_k(N) \leqslant n \leqslant n^+_k(N)\}, \tag{4.20}$$

где

$$n^-_k(N) \leqslant n^-_{k+1}(N),\ n^+_k(N) \leqslant n^+_{k+1}(N).$$

Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\cdot\ t^-_k(N) = \frac{n^-(N)}{N} \to t^-_k,\ t^+_k(N) = \frac{n^+(N)}{N} \to t^+_k,$$

где t^-_k и t^+_k — концы отрезка множества внутренних точек V для $\{W(\lambda),\ c,\ \Phi(\lambda)\}$.

Без ограничения общности

$$r_{1,N}(k,\ n) = \int\limits_{p_0(N)}^{1} W_N(p)\,d\Phi_{N,k,n}(p),$$

$$r_{2,N}(k,\ n) = \int\limits_{0}^{p_0(N)} W_N(p)\,d\Phi_{N,k,n}(p), \tag{4.21}$$

$$r_1(k,\ t)=\int\limits_{\lambda_0}^{\infty} W(\lambda)\,d\Phi_{k,t}(\lambda),\qquad r_2(k,\ t)=\int\limits_{0}^{\lambda_0} W(\lambda)\,d\Phi_{k,t}(\lambda). \tag{4.22}$$

Определим функцию распределения $\Phi_{N,k,l}(k=0,\ 1,\ \ldots,\ l\geqslant 0)$

$$d\Phi_{N,k,l}(p)=\frac{p^k(1-p)^{l-k}d\Phi_N(p)}{\int\limits_0^1 p^k(1-p)^{l-k}d\Phi_N(p)},\quad l\geqslant k$$

и пусть $r_{1,N}(k,\ l)$ и $r_{2,N}(k,\ l)$ вычислены согласно (4.1) интегрированием по $\Phi_{N,k,l}$. Обозначим через $l_k(N)$ корень уравнения $r_{1,N}(k,\ l)=r_{2,N}(k,\ l)$. Определим, далее, при $t\geqslant 0$ функции

$$\widetilde{r}_{i,N}(k,\ t)=Nr_{i,N}\left(k,\ \frac{t}{N}\right);\ i=1,\ 2;\qquad \widetilde{M}_N(k,\ t)=NM_N\left(k,\ \frac{t}{N}\right).$$

Так как $\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^{tN}\to e^{-\lambda t}$ равномерно на любом конечном отрезке $0\leqslant\lambda\leqslant\overline{\lambda}$, то из условий теоремы легко получаем, что при каждом $k=0,\ 1,\ \ldots,\ K$ и $\delta>0$

$$\widetilde{r}_{1,N}(k,\ t)\to r_1(k,\ t),\quad \widetilde{M}_N(k,\ t)\to\Lambda(k,\ t)$$

равномерно на отрезке $0<\delta\leqslant t\leqslant T$. Отсюда вытекает, что

$$t_k(N)=l_k(N)/N\to t_k \text{ при } N\to\infty.$$

Как и в § 3, убеждаемся, что число $k_0(N)$, являющееся номером самой верхней горизонтали, на которой могут быть точки из V_N, определяется так: $k_0(N)$ есть наибольшее из тех k, при которых

$$M_N(k,\ l_k(N))\,[r_{1,N}(k+1,\ l_k(N)+1)-r_{2,N}(k+1,\ l_k(N)+1)]>c_N. \tag{4.23}$$

Обозначив $c(N)=N^2c_N$, перепишем (4.23) в виде неравенства

$$\widetilde{M}_N(k,\ t_k(N))\left[\widetilde{r}_{1,N}\left(k+1,\ t_k(N)+\frac{1}{N}\right)-\widetilde{r}_{2,N}\left(k+1,\ t_k(N)+\frac{1}{N}\right)\right]>c(N),$$

которое при $N\to\infty$ переходит в соотношение для определения номера k_0, самого верхнего отрезка I_{k_0} множества V. Без ограничения общности будем считать, что

$$\Lambda(k,\ t_{k_0})\,[r_1(k_0+1,\ t_{k_0})-r_2(k_0+1,\ t_{k_0})]>c$$

(в противном случае просто переходим к k_0-1). Тогда при достаточно большом N на k_0-й горизонтали имеются внутренние точки, а выше этой горизонтали внутренних точек нет.

Для определения $t^+_{k_0}(N)$ имеем условия

$$\widetilde{M}_N(k,\ t^+_{k_0}(N))\left[\widetilde{r}_{1,N}\left(k+1,\ t^+_{k_0}(N)+\frac{1}{N}\right)-\right.$$
$$\left.-\widetilde{r}_{2,N}\left(k+1,\ t^+_k(N)+\frac{1}{N}\right)\right]>c(N),$$
$$\widetilde{M}_N\left(k,\ t^+_{k_0}(N)+\frac{1}{N}\right)\left[\widetilde{r}_{1,N}\left(k+1,\ t^+_{k_0}(N)+\frac{2}{N}\right)-\right.$$
$$\left.-\widetilde{r}_{2,N}\left(k+1,\ t^+_k(N)+\frac{2}{N}\right)\right]\leqslant c(N).$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$, получим условие для определения $t_{k_0}^+$, так что, в силу свойств строгой монотонности функций (4.21) и (4.22), имеем $t_{k_0}^+(N) \to t_{k_0}^+$.

Докажем теперь, что $t_{k_0}^-(N) \to t_{k_0}^-$. Определим во всех точках $t = \frac{n}{N}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ функции $\widetilde{\rho}_{1,N}(k, t) = N\rho_{1,N}(k, n)$, $\widetilde{\rho}_N(k, t) = N\rho_N(k, n)$. В прямоугольнике $\{0 \leqslant k, \leqslant k_0(N), \ 0 \leqslant t \leqslant t_{k_0}(N)\}$ выполнено рекуррентное соотношение: $\left(\Delta = \frac{1}{N}\right)$

$$\widetilde{\rho}_{1,N}(k, t) = \widetilde{\rho}_N(k, t+\Delta) - \Delta\widetilde{M}_N(k, t)[\widetilde{\rho}_N(k, t+\Delta) - \widetilde{\rho}_N(k+1, t+\Delta)] + c(N)\Delta. \tag{4.24}$$

При $k = k_0$ и $t_{k_0}^-(N) \leqslant t \leqslant t_k^+(N) - \frac{1}{N}$ получим:

$$\widetilde{\rho}_{1,N}(k, t) = \widetilde{\rho}_{1,N}(k, t+\Delta) - \Delta\widetilde{M}_N(k, t)[\widetilde{\rho}_{1,N}(k, t+\Delta) - \widetilde{r}_{2,N}(k+1, t+\Delta)] + c(N)\cdot\Delta. \tag{4.24'}$$

Нетрудно понять, что действительно $t_{k_0}^-(N) \to t_{k_0}^-$, если только будет доказано, что при каждом фиксированном $\delta > 0$ функция $\widetilde{\rho}_N(k_0, t) \to \rho(k_0, t)$ равномерно на отрезке $[\delta, t_{k_0}^+]$. В силу теоремы 4.2, на отрезке $[t_k^-, t_k^+ - \Delta]$ при $k = k_0$

$$\rho_1(k, t) = \rho_1(k, t+\Delta) - \Delta\Lambda(k, t)[\rho_1(k, t+\Delta) - r_2(k+1, t+\Delta)] + c\Delta + o(\Delta), \tag{4.25}$$

где $\frac{o(\Delta)}{\Delta} \to 0$ равномерно по $t \in [t_k^-, t_k^+]$, если только $t_k^- > 0$.

Пусть $\bar{t}_k^+(N)$ — ближайшее к t_k^+ число вида n/N, меньшее t_k^+; $\bar{t}_k^-$ — ближайшее к t_k^- число того же вида, большее t_k^-,

$$\tau_k^- = \max\{\bar{t}_k^-(N), \ t_k^-(N)\}, \qquad \tau_k^+ = \min\{\bar{t}_k^+(N), \ t_k^+(N)\}.$$

Обозначив $\alpha_N(k, t) = \widetilde{\rho}_{1,N}(k, t) - \rho_1(k, t)$, $\beta_N(k, t) = \widetilde{r}_{2,N}(k, t) - r_2(k, t)$, находим из (4.24) и (4.25), что при

$$t \in \left[\tau_k^-(N), \ \tau_k^+(N) - \frac{1}{N}\right],$$

$$\alpha_N(k, t) = \alpha_N(k, t+\Delta) - \Delta[\widetilde{M}_N(k, t) - \Lambda(k, t)][\widetilde{\rho}_{1,N}(k, t+\Delta) - \widetilde{r}_{2,N}(k+1, t+\Delta) - \Delta\Lambda(k, t)\alpha_N(k, t+\Delta) + \Delta\Lambda(k, t)\beta_N(k+1, t+\Delta)] + o(\Delta).$$

Пусть $\delta > 0$ — достаточно малое, но фиксированное число,

$$\delta_N = \max\{\tau_N^-, \ \delta\}.$$

Из неравенства $\rho_{1,N}(k, t) \leqslant r_{1,N}(k, t)$ при $t \leqslant t_k^+(N)$ и из равномерной сходимости функций $\widetilde{r}_{1,N}(k, t)$, $\widetilde{r}_{2,N}(k, t)$, $\widetilde{M}_N(k, t)$ на отрезке $[\delta, t_k^+]$ к ограниченным функциям $r_1(k, t)$, $r_2(k, t)$, $\Lambda(k, t)$ соответственно, заключаем, что второе слагаемое в (4.26) есть $o(\Delta)$ равномерно по t на $[\delta, t_k^+]$.

По той же причине $\Delta\Lambda(k, t)\beta_N(k+1, t+\Delta) = o(\Delta)$ равномерно по τ на $[\delta, t_k^+]$. Таким образом

$$\alpha_N(k, t) = \alpha_N(k, t+\Delta) - \Delta\Lambda(k, t)\alpha_N(k, t+\Delta) + o(\Delta). \quad (4.27)$$

Пусть теперь $m = m(t, N) = (\tau_k^+(N) - t)N$. Из (4.27) имеем

$$\alpha_N(t) = \alpha_N(\tau_k^+(N)) - \Delta \sum_{i=0}^{m-1} \Lambda(k, t+\Delta i)\alpha_N(k, t+\Delta(i+1)) + o(1). \quad (4.28)$$

Учитывая же, что $t_k^+(N)$, $\tau_k^+(N) \to t_k^+$, $\rho_{1,N}(k, t_k^+(N)) \to r_1(k, t_k^+)$, заключаем, что для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно большом N будет $|\alpha_N(\tau_k^+(N))| < \varepsilon$. Но тогда из (4.28) следует, что при $\delta_N < t < \tau_k^+(N)$

$$|\alpha_N(t)| \leqslant (t_k^+ - t)A\varepsilon + o(1), \quad A = \text{const}.$$

Проследив, как получено $o(1)$ в последнем неравенстве, находим, что $\tilde{\rho}_N(k, t) \to \rho(k, t)$ равномерно на отрезке $[\delta, t_k^+]$.

Рассматривая, далее, $k = k_0 - 1$, $k_0 - 2$ и т. д., убеждаемся с помощью (4.24), что $t_k^+(N) \to t_k^+$, $t_k^-(N) \to t_k^-$.

Заметим, что попутно нами доказана

Теорема 4.4. *Если выполнены условия теоремы* 4.3, *то при* $0 \leqslant k \leqslant K$ *и любом* $\delta > 0$ *функция* $\rho_N(k, t)$ *сходится к* $\rho(k, t)$ *равномерно на отрезке* $[\delta, T]$.

Таким образом, для использования теорем 4.3 и 4.4 при аппроксимации оптимальных методов статистического приемочного контроля с помощью байесовских решений для процесса Пуассона, вместе с малостью c и p_0 необходимо совпадение порядков малости величин c и p_0^2.

Поступила в редакцию
6. 11. 56

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, Несмещенные оценки, Изв. АН СССР, сер. матем., 14 (1950).
[2] А. Н. Колмогоров, Стат. прием. контроль при допустимом числе дефектных изделий, равном нулю, Л., 1951.
[3] С. Х. Сираждинов, Одинарный статистический приемочный контроль, Тр. ИММ АН УзССР, вып. 15 (1955).
[4] A. Wald, Statistical Decision Function, Ann. Math. Stat., 20 (1949).
[5]. A. Wald, J. Wolfowitz, Bayes solution of sequential decision problems, Ann. Math. Stat., 21 (1950).
[6] M. Sobel, An essentially complete class of decision function for certain standard sequential problems, Ann. Math. Stat., 24 (1953).
[7] Е. Б. Дынкин, Необходимые и достаточные статистики, УМН, VI, I (1953).
[8] A. Dvoretzky, J. Kiefer, J. Wolfowitz, Sequential decision problems for process with continuous time parameter, Ann. Math. Stat., 24 (1953).
[9] D. Blackwell, M. A. Girshick, Theory of games and statistical decision, New York, 1954.
[10] А. Н. Колмогоров, Основные понятия теории вероятностей, ОНТИ, 1936.
[11] В. С. Михалевич, Оптимальные методы ст. прием. контроля, Труды III Всес. математич. съезда, т. 1 (1956), 124.

CONSECUTIVE BAYES' SOLUTIONS AND OPTIMAL METHODS OF STATISTICAL ACCEPTANCE CONTROL

V. S. MIHALEVIČ (KIEV)

(Summary)

In this paper are described classes of sequential Bayes' solutions for the binomia family of distributions and for the Poisson process if the weight function is monotonous and some of its zeros are points of increase for the a priori probability distribution. The corresponding Bayes' solutions are truncated with respect to n (or t). These solutions are determined by the process of trial and error between two bounds. A risk function for a Poisson process is proved to satisfy certain differential equations. It is possible to determine the bounds of Bayes' solutions with the help of these equations.

The limiting theorem on the convergence of the boundaries of Bayes' solutions and the risk functions, when the corresponding binomial processes converge to a Poisson process, is proved. The results obtained are used for describing the class of optimum methods of statistical acceptance control.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том I И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 4*
1956

К ВОПРОСУ О НАХОЖДЕНИИ ГЕНЕРАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПО РАСПРЕДЕЛЕНИЮ СТАТИСТИКИ

Ю. В. ЛИННИК

Пусть X — одномерная случайная величина с законом распределения $F(x) = \mathbf{P}(X < x)$, а $\xi = (x_1, \ldots, x_n)$ — соответствующая повторная выборка (случайный вектор с независимыми компонентами, распределенными по закону $F(x)$).

Пусть над X производятся непрямые наблюдения, в результате которых обнаруживается закон распределения некоторой статистики $Q(\xi)$ (непрерывной функции выборочного вектора ξ)

$$F_Q(x) = \mathbf{P}(Q < x). \tag{1}$$

Естественно поставить вопрос о том, насколько знание закона распределения статистики $F_Q(x)$ определяет генеральный закон распределения $F(x)$. Если мы точно знаем $F_Q(x)$, то это чисто аналитическая постановка вопроса, если же имеем лишь большую выборку значений статистики Q и хотим получить сведения о $F(x)$, то это обычная для математической статистики постановка, появляющаяся здесь, однако, в непараметрической форме. Мы можем ставить вопрос о том, когда возможно построить доверительную полосу для $F(x)$ на основании наблюдений $Q_1, \ldots, Q_m$ над статистикой Q. Но для этого предварительно нужно рассмотреть аналитическую сторону вопроса. Настоящая работа посвящена этому.

1. Указанную аналитическую постановку вопроса можно рассматривать в некотором смысле как обобщение классической проблемы моментов. Именно, допустим, что распределение $F(x)$ имеет все моменты $\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x)$, и положим: $Q = x_1 + \ldots + x_n = n\bar{x}$; Q также будет иметь все моменты; легко видеть, что, вычисляя моменты Q (при известном распределении Q), найдем последовательно все величины α_k. Поэтому в классе законов распределений $F(x)$, имеющих все моменты и удовлетворяющих условиям единственности решения проблемы моментов, распределение статистики Q будет определять $F(x)$.

Вместо $Q = n\bar{x}$ можно взять любую линейную форму с положительными коэффициентами: $Q = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$; $a_i > 0$. Если же допустить и отрицательные коэффициенты, то, вообще говоря, распределение Q не будет

однозначно определять генеральное распределение; так, при $n = 2$, $Q = x_1 - x_2$, при любом a, законы распределения $F(x + a)$ будут неотличимы от закона $F(x)$ на основании распределения статистики Q.

Пусть дана непрерывная статистика Q; множество точек $\xi = (x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих условию:

$$Q(x_1, \ldots x_n) = c \tag{1.1}$$

назовем поверхностью уровня c статистики Q. В дальнейшем будем рассматривать только такие статистики Q, для которых поверхности уровня (1.1) являются звездчатыми и кусочно-гладкими (с конечным числом гладких кусков), или пустыми множествами.

Статистику Q будем называть определенной, если поверхность уровня (1.1) при любом c расположена в ограниченной области выборочного пространства, и неопределенной в противном случае.

Поведение нелинейных неопределенных статистик и связи их распределения с генеральным распределением представляют значительные трудности для исследования. В настоящей работе мы будем заниматься лишь определенными статистиками. Однако и такие статистики, вообще говоря, не будут однозначно определять генеральное распределение.

Возьмем, например, $n = 1$; в качестве генерального распределения случайную величину, сосредоточенную на интервале $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и имеющую на этом сегменте плотность $\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{x}{2}$, и положим $Q = x^2$. Здесь выборочное пространство — сегмент $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и статистика на нем определенная. В то же время, при любых достаточно малых значениях ε_j и любых целых k; N получим:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} Q^k \left(\cos \frac{x}{2} + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j \sin jx\right) dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} Q^k \cos \frac{x}{2}\, dx,$$

причем в круглых скобках будут стоять плотности вероятностей случайных величин, сосредоточенных на $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Дело, однако, меняется, если рассматривать симметрические случайные величины со средним значением 0. Их распределения при довольно общих условиях будут восстанавливаться по распределению статистики Q. Здесь мы будем разбирать такие случаи.

2. Для формулировки полученных в этом направлении теорем введем некоторые определения. Мы будем рассматривать классы функций $y(x)$, непрерывных на всей действительной оси.

Будем говорить, что множество функций $\{y(x)\}$ образует класс $\{D\}$, на сегменте $[\alpha, \beta]$ (допускаются значения $\pm\infty$ для α, β), если на всяком конечном сегменте $[a, b] \subset [\alpha, \beta]$ разность двух функций класса $\{D\}$

$$y_1(x) - y_2(x);\ y_1(x) \in \{D\};\ y_2(x)$$

имеет лишь конечное число нулей, либо есть тождественный нуль.

Разности $y_1(x) - y_2(x)$ не меняются от сдвига всех функций класса на одну и ту же непрерывную функцию $h(x)$, и потому всякая непрерывная функция принадлежит какому-либо классу $\{D\}$.

Пример классов $\{D\}$ могут представить: полиномы; все функции, аналитические в окрестности сегмента $[\alpha, \beta]$; квазианалитические классы функций; мы приведем и другие примеры.

Согласно С. Мандельбройту [1] заданной последовательности положительных чисел m_n $(n = 1, 2, \ldots)$ сопоставляется класс всех функций $y(x)$, имеющих все производные на конечном сегменте $[\alpha, \beta]$, для каждой из которых существует своя константа $K > 0$, такая, что

$$|y^{(n)}(x)| \leqslant K^n m_n \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2.1}$$

Класс $C_{\{m_n\}}$ называется квазианалитическим (Δ), если из

$$y_1^{(n)}(x_0) = y_2^{(n)}(x_0) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.2}$$

при $y_1(x) \in C_{\{m_n\}}$; $y_2(x) \in C_{\{m_n\}}$ следует

$$y_1(x) \equiv y_2(x). \tag{2.3}$$

Необходимые и достаточные условия квазианалитичности $C_{\{m_n\}}$ доставляются теоремой Карлемана (С. Мандельбройт, [1], стр. 31).

Легко видеть, что класс $C_{\{m_n\}}$ квазианалитический (Δ) на всяком конечном сегменте $[a, b] \subset [\alpha, \beta]$ будет классом (D) на $[\alpha, \beta]$. Чтобы в этом убедиться, составим разность двух функций класса, $y_1(x) - y_2(x)$. Если она имеет бесконечное число нулей на $[a, b]$, то там будет предельная точка этих нулей x_0. Согласно теореме Ролля, между двумя нулями $y_1(x) - y_2(x)$ будет содержаться нуль $y_1'(x) - y_2'(x)$ и множество нулей такой разности будет иметь ту же предельную точку x_0. Это же будет касаться $y_1^{(n)}(x) - y_2^{(n)}$, так что: $y_1^{(n)}(x_0) = y_2^{(n)}(x_0)$ при $n = 1, 2, \ldots$, откуда

$$y_1(x) = y_2(x).$$

Чтобы получить примеры, выводящие нас из класса бесконечно-дифференцируемых функций (помимо тривиальных примеров, полученных сдвигом всех функций класса на непрерывную функцию без производной), можно делать суперпозиции функций.

Пусть $g(x)$ — непрерывная функция, заданная на всей оси, и такая, что при любом g_0 уравнение $g(x) = g_0$ имеет лишь конечное число решений; рассмотрим также какой-либо класс функций типа $\{D\}$ и образуем из них новый класс непрерывных функций $y(g(x))$. Если на конечном сегменте $[a, b]$ разности $y_1(g(x)) - y_2(g(x))$ двух функций нового класса имеют бесконечное число нулей, то по свойствам класса $\{D\}$ должно быть: $g(x_1) = g(x_2) = g(x_3) = \ldots$ для бесконечного множества различных чисел $x_1, x_2, x_3 \ldots$, что невозможно, так что новый класс есть также класс типа $\{D\}$.

Введем теперь более общий тип классов $\{D_{\text{кус}}\}$. Будем говорить, что множество непрерывных функций $y(x)$ образует класс типа $\{D_{\text{кус}}\}$ ($\{D\}$ — кусочный) на сегменте $[\alpha, \beta]$, если всякий конечный сегмент $[a, b] \subset [\alpha, \beta]$

можно разбить на конечное число примыкающих один к другому сегментов $[a_m, b_m]$, на каждом из которых функции $y(x)$ принадлежат классу типа $\{D\}$.

Будем рассматривать в дальнейшем класс вероятностных симметрических плотностей $y(x)$, заданных на всей оси и принадлежащих к классу типа $\{D_{\text{кус}}\}$. Заметим, что $\{D_{\text{кус}}\}$, вообще говоря, не будет классом $\{D\}$.

3. Сформулируем теперь получающиеся теоремы.

Теорема 1. *Пусть в сегменте* $[-\alpha, \alpha]$ *дана четная непрерывная вероятностная плотность* $y(x)$, *которая может обращаться в нуль лишь на концах этого сегмента. Пусть* $Q(x_1, \ldots, x_n)$ *определенная, кусочно-гладкая звездчатая однородная положительного измерения статистика. Тогда распределение этой статистики, индуцированное* $y(x)$, *определяет* $y(x)$ *в классе четных плотностей типа* $\{D_{\text{кус}}\}$, *содержащем* $y(x)$.

Теорема 2. *Пусть рассматриваются вероятностные плотности, заданные на сегменте* $[-\alpha, \alpha]$, *принадлежащие классу типа* $\{D_{\text{кус}}\}$ *и имеющие не более, чем счетное множество нулей на сегменте задания. Если одна из таких плотностей* $y(x)$ *индуцирует распределение статистики* $Q(x_1, \ldots, x_n)$ *типа, указанного в теореме* 1, *то это распределение статистики определяет плотность* $y(x)$ *в ее классе.*

Перейдем к формулировкам теорем 3 и 3′.

4. Будем говорить, как и в теореме 1, что распределение статистики $Q = Q(x_1, \ldots, x_n)$ индуцировано генеральной совокупностью X с законом распределения $F(x) = \mathbf{P}(X < x)$, если оно отвечает выборке $\xi = (x_1, \ldots, x_n)$ из этой совокупности. Далее, вероятностную плотность $y(x)$ будем называть вполне симметрической, если отвечающую ей случайную величину Z можно представить в виде:

$$Z = Z_1 - Z_2, \tag{4.1}$$

где Z_1 и Z_2 — одинаково распределенные случайные величины, имеющие плотность, принадлежащую $L_2(-\infty, \infty)$.

Теорема 3. *Пусть дана вполне симметричная плотность* $y(x)$, *голоморфная во всех точках действительной оси и индуцирующая на определенную статистику* $Q(x_1, \ldots, x_n)$ *типа, указанного в теореме* 1, *некоторое распределение. Тогда это распределение определяет* $y(x)$ *в классе всех вполне симметрических плотностей ограниченной вариации в окрестности нуля.*

В частности, если $y(x)$ нормальная плотность с нулевым средним, имеем:

Теорема 3′. *Нормальная плотость* $y(x)$ *с нулевым средним определяется распределением указанной выше статистики среди всех плотностей вполне симметричных и ограниченной вариации в окрестности нуля.*

5. Пусть $Q = Q(x_1, \ldots, x_n)$ — определенная статистика с кусочно гладкими поверхностями уровня, является однородной функцией измерения $\mu > 0$, так что:

$$Q(tx_1, \ldots, tx_n) = t^{\mu} \cdot Q(x_1, \ldots, x_n) \tag{5.1}$$

при всех $t > 0$. Заменим теперь статистику Q статистикой $Q_1 = |Q|^{1/\mu}$.

Эта статистика будет того же типа, что и Q, а кроме того, неотрицательной и измерения 1.

Пусть распределение Q_1 индуцируется генеральным распределением X, имеющим непрерывную плотность вероятности $y(x)$. Тогда, как легко видеть, Q_1 также будет иметь непрерывную при $x \geqslant 0$ плотность вероятности. Это следует из определенности статистики и кусочной гладкости ее поверхностей уровня.

Введя параметр $\rho > 0$ и обозначая плотность вероятности распределения статистики $\gamma(\rho)$ ($\gamma(\rho) = 0$ при $\rho < 0$), найдем:

$$\mathbf{P}(Q_1 < R) = \int_0^R \gamma(\rho)\, d\rho.$$

Мы можем теперь считать статистику Q_1, распределение которой определяется распределением Q, исходной, и переобозначить ее буквой Q. Нас будет интересовать задача восстановления $y(x)$ по значениям $\gamma(\rho)$ с точки зрения единственности решения.

Перейдем к составлению основного интегро-функционального уравнения задачи. Оно состоит попросту в выражении плотности вероятности $\gamma(\rho)$ статистики Q через плотность $y(x)$ в сферических координатах.

Введем в выборочном пространстве сферические координаты.

$$\begin{aligned}
x_1 &= \rho\cos\varphi_1,\\
x_2 &= \rho\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
x_{n-1} &= \rho\sin\varphi_1\sin\varphi_2\dots\cos\varphi_{n-1},\\
x_n &= \rho\sin\varphi_1\sin\varphi_2\dots\sin\varphi_{n-1};
\end{aligned}$$

$$\rho \geqslant 0;\ 0 \leqslant \varphi_i \leqslant \pi\ (i = 1, 2, \dots, n-2);\ 0 \leqslant \varphi_{n-1} \leqslant 2\pi;$$

якобиан преобразования есть $\rho^{n-1} J_0(\varphi)$, где

$$J_0(\varphi) = \sin^{n-2}\varphi_1 \sin^{n-3}\varphi_2 \dots \sin\varphi_{n-1}. \tag{5.2}$$

Введем обозначение: $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$; $d\varphi = d\varphi_1 \dots d\varphi_n$; (φ)—полная область изменения φ.

Запишем уравнение поверхности уровня $Q = 1$ в форме:

$$x_1 = g_1(\varphi);\ x_2 = g_2(\varphi), \dots, x_n = g_n(\varphi). \tag{5.3}$$

В силу однородности статистики Q, измерения 1, уравнение звездчатой поверхности уровня $Q = \rho$ будет:

$$x_1 = \rho g_1(\varphi), \dots, x_n = \rho g_n(\varphi). \tag{5.4}$$

Тогда основное интегро-функциональное уравнение запишется в виде:

$$\int\limits_{(\varphi)} \dots \int y(\rho g_1(\varphi))\, y(\rho g_2(\varphi)) \dots y(\rho g_n(\varphi))\, \rho^{n-1} J_0(\varphi)\, d\varphi = \gamma(\rho) \tag{5.5}$$

при любом $\rho \geqslant 0$. Полагая $\frac{\gamma(\rho)}{\rho^{n-1}} = \gamma_0(\rho)$, получим:

$$\int\limits_{(\varphi)} \dots \int y(\rho g_1(\varphi)) \dots y(\rho g_n(\varphi)) \cdot J_0(\varphi)\, d\varphi = \gamma_0(\rho). \tag{5.6}$$

Уравнение (5.6) имеет место при любом $\rho \geqslant 0$; здесь $\gamma_0(\rho)$ — заданная функция; речь идет о единственности восстановления по ней $y(x)$.

Будем считать $y(x)$ плотностью симметрического закона; стало быть, четной функцией. Положим:

$$y(x) = z(x^2).$$

Уравнение (5.6) перепишется так:

$$\int_{(\varphi)} \cdots \int z(\rho^2 g_1^2(\varphi)) \ldots z(\rho^2 g_n^2(\varphi))\, I_0(\varphi)\, d\varphi = \gamma_0(\rho). \tag{5.7}$$

Положим $\rho^2 = r$; $r = \sqrt{\rho} > 0$; $\gamma_0(\rho) = \gamma_1(r)$; $\psi_i(\varphi) = g_i^2(\varphi)$; тогда (5.7) перепишется в виде:

$$\int_{(\varphi)} \cdots \int z(r\psi_1(\varphi)) \ldots z(r\psi_n(\varphi)) \cdot I_0(\varphi)\, d\varphi = \gamma_1(r). \tag{5.8}$$

Здесь $\psi_i(\varphi) \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, а r может принимать любые положительные значения: $\gamma_1(r)$ — заданная функция r.

Если основной сегмент $[-\alpha, \alpha]$, на котором задана вероятностная плотность функции $y(x)$, являющаяся решением (5.6), можно погрузить в такую открытую область комплексного переменного $v = x + iy$, что $y(v)$ голоморфна в каждой точке этой области, то в классе функций такого вида $y(v)$ определяется однозначно. Имеем: $y(v) = z(v^2)$ в окрестности $v = 0$, полагая $v^2 = r$, приходим к уравнению (5.8). В силу $\psi_i(\varphi) \geqslant 0$; $I_0(\varphi) \geqslant 0$, однозначно определяем $y(0)$; замечая, что правая часть будет тоже голоморфной в рассматриваемой области значений v, дифференцируем по r один, два и т. д. раза, и полагая $r = 0$, последовательно определим производные $z'(0), z''(0), \ldots, z^{(n)}(0), \ldots$ и, следовательно, саму функцию $y(x)$ при $|x| \leqslant \alpha$. Далее мы будем рассматривать более обширные классы решений. Мы будем рассматривать только четные решения $y(x)$, так что достаточно изучать лишь уравнение (5.8).

Обозначим:

$$\sup_{(i,\varphi)} \psi_i(\varphi) = \psi_0. \tag{5.9}$$

Имеем $\psi_0 > 0$ и для всех значений φ

$$0 < r\psi_i(\varphi) \leqslant r\psi_0. \tag{5.10}$$

6. Пусть (5.6) имеет решение $y(x)$, сосредоточенное в сегменте $[-\alpha, \alpha]$, непрерывное и необращающееся в нуль в интервале $(-\alpha, \alpha)$. В этом случае $z(x) \neq 0$ при $x \in (-\sqrt{\alpha}, \sqrt{\alpha})$. Пусть $y(x)$ погружено в некоторый класс типа $\{D_{\text{кус}}\}$, на основании замечаний п. 3, в такой же класс будет погружено $z(x)$. Пусть функция $z_1(x)$ из этого же класса является решением (5.8). Составим разность $\eta(x) = z_1(x) - z(x)$.

Так как (5.8) определяет $z(0) = z_1(0)$, то $\eta(0) = 0$. Будем изучать поведение $\eta(x)$ при $x \neq 0$. Функция $\eta(x)$ непрерывна; считая, что $z_1(x) \not\equiv z(x)$, имеем: $\eta(x) \not\equiv 0$.

Пусть $x_0 \geqslant 0$ наибольшее число под условием: $\eta(x) = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant x_0)$; при сколь угодно малом $\Delta > 0$ на сегменте $[x_0, x_0 + \Delta]$ найдутся точки ξ, где $\eta(\xi) \neq 0$.

Положим, выбирая какое-либо $\Delta \in (0, 1)$,

$$r_0 = \frac{x_0}{\psi_0}\,; \quad r_1 = \frac{x_0 + \Delta}{\psi_0}\,. \tag{6.1}$$

Рассмотрим функции $\eta(r\psi_i(\varphi)); \quad 0 \leqslant r \leqslant r_1; \; i = 1, 2, \ldots, n$. Имеем $\eta(r\psi_i(\varphi)) = 0; \; (0 \leqslant r \leqslant r_0)$. Таким образом, существенным будет лишь поведение $\eta(r\psi_i(\varphi)$ в области $\frac{x_0}{\psi_0} \leqslant r \leqslant \frac{x_0 + \Delta}{\psi_0}$.

Полагая $\Pi(z, r, \varphi) = \prod_{i=1}^{n} z(r\psi_i(\varphi))$, составим разность:

$$\Pi(z_1, r, \varphi) - \Pi(z, r, \varphi) = \sigma_1(r, \varphi) + \sigma_2(r, \varphi),$$

где

$$\sigma_1(r, \varphi) = \sum_i \eta(r \cdot \psi_i(\varphi)) \prod_{k \neq i} z(r\psi_k(\varphi)) \tag{6.2}$$

$$\sigma_2(r, \varphi) = \sum_{\substack{i_1, i_2 \\ i_1 \neq i_2}} \eta \cdot (r\psi_{i_1}(\varphi))\, \eta(r\psi_{i_2}(\varphi)) \prod_{k \neq i_1, i_2} z(r\psi_k(\varphi)) +$$

$$+ \sum_{\substack{i_1, i_2, i_3 \\ i_1 \neq i_2;\, i_1 \neq i_3;\, i_2 \neq i_3}} \eta(r\psi_{i_1}(\varphi))\, \eta(r\psi_{i_2}(\varphi))\, \eta(r\psi_{i_3}(\varphi)) \prod_{k \neq i_1, i_2, i_3} z(r\psi_k(\varphi)) + \ldots \tag{6.3}$$

Подставляя в (5.8) два решения $z_1(x)$ и $z_2(x)$ и вычитая полученные выражения одно из другого, найдем:

$$\int\limits_{(\varphi)} \ldots \int \sigma_1(r, \varphi)\, I_0(\varphi)\, d\varphi = -\int\limits_{(\varphi)} \ldots \int \sigma_2(r, \varphi)\, I_0(\varphi)\, d\varphi. \tag{6.4}$$

Это соотношение годно для любых $r \geqslant 0$, но мы будем его рассматривать для r из сегмента:

$$I_\Delta = \left[\frac{x_0}{\psi_0}\,, \; \frac{x_0 + \Delta}{\psi_0}\right]. \tag{6.5}$$

Мы имеем: $y(x)$ и $y_1(x)$ принадлежит классу типа $\{D_{\text{кус}}\}$, а потому $x(x)$ и $z_1(x)$ будут принадлежать классу того же типа. Таким образом, на всяком достаточно малом сегменте, $\eta_1(x) = z_1(x) - z(x)$ либо тождественно обращается в нуль, либо имеет лишь конечное число нулей. Докажем теперь лемму:

Лемма 1. *При достаточно малом значении числа* Δ *в* (6.5) *и* $r \in I_\Delta$, $\eta(r\psi_i(\varphi))$ *будет одного и того же знака (либо будет обращаться в нуль) для всех* $i = 1, 2, \ldots, n$ *и всех значений* φ.

Для доказательства заметим, что при $r \in I_\Delta$,

$$\eta(r\psi_i(\varphi)) = \eta\left(\frac{x_0\psi_i(\varphi)}{\psi_0} + \frac{\theta \cdot \Delta \cdot \psi_i(\varphi)}{\psi_0}\right); \; \theta \in [0, 1].$$

Далее, $0 \leqslant \psi_i(\varphi) \leqslant \psi_0$. Таким образом, область значений $r\psi_i(\varphi)$ целиком содержится в сегменте $[0, x_0 + \Delta]$. Далее, $\eta(x) = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant x_0$, так что множество тех значений $r\psi_i(\varphi)$, для которых $\eta(r\psi_i(\varphi))$ отлично от нуля, содержится в сегменте $[x_0, x_0 + \Delta]$. Имеем: $\eta(x_0) = 0$; мы знаем, что при сколь угодно малом Δ в указанном сегменте будут точки x, где $\eta(x) \neq 0$. Из свойств класса типа $\{D_{\text{кус}}\}$ вытекает, что при достаточно малом Δ на всем сегменте $[x_0, x_0 + \Delta]$, $\eta(x)$ будет сохранять знак, обращаясь в нуль лишь при $x = x_0$. Этим лемма доказана. Заметим, что если знак $\eta(x)$ положителен, то (6.4) возможно лишь при $\sigma_1(r, \varphi)$ и $\sigma_2(r, \varphi)$, равных нулю почти всюду, и если решение $z(x)$ отлично от 0 при $0 \leqslant x \leqslant x_0 + \Delta$, то соотношение $\eta(x) \equiv 0$ тривиально, и решение $z(x)$ единственно. Мы могли бы добиться нужного знака $\eta(x)$, заменяя, в случае нужды, $\eta(x)$ на $-\eta(x)$ и $z(x)$ на $z_1(x)$. Но тогда пришлось бы предполагать, что любое конкурирующее решение $z_1(x) \not\equiv 0$ при $0 \leqslant x \leqslant x + \Delta$, что нежелательно:

7. Обозначим:

$$\eta_\Delta = \sup_{x_0 \leqslant x \leqslant x+\Delta} |\eta(x)|.$$

Допустим, что $\eta_\Delta \neq 0$ и придем, исходя из этого предположения, к противоречию. Мы предполагаем, соответственно сказанному ранее, что $z(x) \not\equiv 0$ при $0 \leqslant x < \alpha^2$; считая $\Delta < \frac{\alpha^2 - x_0}{2}$, получим

$$c_1 \leqslant z(x) \leqslant c_2 \tag{7.2}$$

(в дальнейшем c_1, c_2 — положительные константы).

Возьмем какой-либо член суммы (6.3), содержащий множитель $\eta(r\psi_i(\varphi))$, умножим этот член на $I_0(\varphi)$ и проинтегрируем по φ. Полученное выражение по абсолютной величине не может превосходить

$$c_2^{n-2} \cdot \eta_\Delta \int_{(\varphi)} \cdots \int |\eta(r\psi_i(\varphi))| I_0(\varphi)\, d\varphi. \tag{7.3}$$

Сумма $\sigma_2(r, \varphi)$ имеет не более 2^n членов, так что из (7.3) заключаем:

$$\left| \int_{(\varphi)} \cdots \int \sigma_2(r, \varphi) \cdot I_0(\varphi)\, d\varphi \right| \leqslant 2^n c_2^{n-2} \eta_\Delta \cdot \sum_{i=1}^{n} \int_{(\varphi)} \cdots \int |\eta(r\psi_i(\varphi))| I_0(\varphi)\, d\varphi. \tag{7.4}$$

С другой стороны, из (6.2) и (7.2) имеем:

$$\left| \int_{(\varphi)} \cdots \int \sigma_1(r, \varphi) I_0(\varphi)\, d\varphi \right| \geqslant c_1^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \int_{(\varphi)} \cdots \int |\eta(r\psi_i(\varphi))| I_0(\varphi)\, d\varphi. \tag{7.5}$$

При достаточно малом Δ, η_Δ сколь угодно мало, так что (7.4) и (7.5) противоречат (6.4), если только не выполнены соотношения:

$$\int_{(\varphi)} \cdots \int |\eta(r\psi_i(\varphi))| I_0(\varphi)\, d\varphi = 0; \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{7.6}$$

Полагая $i = i_0$, $\varphi = \varphi_0$, так что $\psi_i(\varphi_0) = \psi_0$, и выбирая $r_1 = \dfrac{x_0 + \Delta}{\psi_0}$, видим, что $\eta(r\psi_{i_0}(\varphi)) \neq 0$ при r и φ достаточно близких к r_1 и φ_0, что противоречит (7.6). Это доказывает теорему 1.

Обратимся к теореме 2. Будем рассматривать четные решения $y(x)$ уравнения (5.6), принадлежащие к классу типа $\{D_{\text{кус}}\}$ и, кроме того, имеющие не более, чем счетное множество нулей в области определения. Введем, как в п. 6, функции $z(x) = y(\sqrt{|x|})$; $z_1(x) = y_1(\sqrt{|x|})$ соответственно двум предполагаемым решениям $y(x)$ и $y_1(x)$. В обозначениях п. 6 выберем Δ столь малое, чтобы разность $z_1(x) - z(x)$ сохраняла знак на отрезке $(x_0, x_0 + \Delta]$, и положим $\eta(x) = \pm(z_1(x) - z(x))$, где знак выбран так, что $\eta(x) > 0$. Можем считать этот знак положительным за счет возможного переименования решений. Обращаясь к (6.4), выводим, что

$$\int_{(\varphi)}\cdots\int \sigma_1(r, \varphi) \cdot I_0(\varphi)\, d\varphi = 0. \tag{7.7}$$

Рассуждая так же, как и по поводу (7.6), выбирая индекс i_0 и замкнутую область значений r и φ такую, что $\eta(r\psi_{i_0}(\varphi)) > \lambda_1 > 0$ в этой области, находим из (6.2)

$$\int_{\Omega(r,\varphi)}\cdots\int \prod_{k \neq i_0} z(r\psi_k(\varphi))\, I_0(\varphi)\, d\varphi = 0. \tag{7.8}$$

В области $\Omega(r, \varphi)$ всюду, кроме множества точек меры нуль (по r, φ), подынтегральная функция $\neq 0$, она всюду непрерывна; таким образом, равенство (7.8) противоречиво, и $\eta(x) \equiv 0$ всюду. Это доказывает теорему 2.

8. Для доказательства теоремы 3 нам нужно будет доказать одну лемму из теории положительно определенных функций.

Лемма 2. *Пусть $\varphi(x)$ — действительная положительно определенная функция, голоморфная в окрестности $x = 0$, а $g(x)$ — действительная положительно определенная функция переменного x. Если точка $x = 0$ является предельной точкой для нулей разности $g(x) - \varphi(x)$, то $g(x)$ совпадает с $\varphi(x)$.*

Заметим, что здесь не предполагается голоморфности $g(x)$ в окрестности $x = 0$, в противном случае утверждение было бы почти тривиальным.

Сперва докажем вспомогательное утверждение:

Пусть $y(x)$ — действительная положительно определенная функция и пусть существует $y''(0)$ (и, стало быть, $y''(x)$ при всех x). Положим $x^2 = u$. Тогда функция:

$$\frac{dy(x)}{du} = y_1(x) \tag{8.1}$$

существует и после умножения на -1 становится положительно определенной и четной функцией переменного x.

Для доказательства положим $y(x) = \int_0^\infty \cos z\, dF(z)$, где $F(z)$ — неубывающая функция ограниченной вариации. Из существования $\int_0^\infty z^2 dF(z) = -y''(0)$ следует существование $y''(x) = -\int_0^\infty \cos xz \cdot z^2 dF(z)$ и $y'(x) = -\int_0^\infty \sin xz \cdot z dF(z)$, причем соответствующие интегралы абсолютно сходятся. Отсюда следует, что $\frac{dy(x)}{d(x^2)} = \frac{1}{2x}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin xz}{x} z dF(z)$ существует при всех $x \geqslant 0$ и интеграл абсолютно сходится. Докажем, что $\int_0^\infty \frac{\sin xz}{x} z dF(z)$ есть положительно определенная четная функция x. Для этого заметим, что если $f(x)$ — положительно определенная функция x и интеграл $\int_0^\infty f(\alpha x)\, d\sigma(\alpha)$, где $\sigma(\alpha)$ — неубывающая функция, сходится при $x = 0$, то он изображает положительно определенную функцию. Отсюда следует, что $\frac{\sin x}{x} = \int_0^1 \cos \alpha x\, d\alpha$ и $\int_0^\infty \frac{\sin xz}{xz} z^2 dF(z) = \int_0^\infty \frac{\sin xz}{x} z dF(z)$ — положительно определенные функции, и соответствующие интегралы абсолютно сходятся при $x \geqslant 0$. Наше утверждение доказано.

Обратимся теперь к самой лемме. Функции $g(x)$ и $\varphi(x)$ четные; в любой окрестности нуля их разность $g(x) - \varphi(x)$ будет иметь бесконечно много положительных нулей $\xi_\nu \to 0$.

Пусть $g(x) = \int_0^\infty \cos xz\, d\sigma(z)$; $\varphi(x) = \int_0^\infty \cos xz\, d\Phi(z)$ и, так как мы должны иметь: $g(0) - \varphi(0) = 0$, то полные вариации неубывающих функций $\sigma(z)$ и $\Phi(z)$ совпадают. Далее имеем:

$$\frac{g(\xi_\nu) - g(0)}{\xi_\nu^2} = \frac{\varphi(\xi_\nu) - \varphi(0)}{\xi_\nu^2}$$

для всех нулей разности $\xi_\nu > 0$. Далее, по условию, $\varphi(x)$ голоморфная функция, так что:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \int_0^\infty z^{2n} d\Phi(z). \tag{8.2}$$

Мы видим отсюда, что $\frac{d^\nu \varphi(x)}{(d(x^2))^\nu}$ будет также голоморфной в некоторой окрестности нуля при всяком данном целом $\nu \geqslant 0$ по нашему вспомогательному утверждению; $(-1)^\nu \frac{d^\nu \varphi(x)}{(d(x^2))^\nu}$ будет положительно определенной, и притом четной.

При $\xi_\nu \to 0$, $\frac{\varphi(\xi_\nu)-\varphi(0)}{\xi_\nu^2}$, а следовательно, и

$$\frac{g(\xi_\nu)-g(0)}{\xi_\nu^2} \tag{8.3}$$

будут иметь предел.

Но (8.3) равно $-\int_0^\infty \frac{1-\cos \xi_\nu z}{\xi_\nu^2}\, d\sigma(z) = -2\int_0^\infty \frac{\sin^2 \frac{\xi_\nu z}{2}}{\xi_\nu^2}\, d\sigma(z)$. Отсюда выводим, что $\int_0^{\frac{1}{4\xi_\nu}} \frac{\sin^2 \frac{\xi_\nu}{2}}{\xi_\nu^2}\, d\sigma(z) > c_4 \int_0^{\frac{1}{4\xi_\nu}} z^2\, d\sigma(z)$ ограничен для всех ξ_ν, так что $\int_0^\infty z^2\, d\sigma(z) < \infty$ и $g''(0)$, а значит, и $g''(x)$ существует для всех действительных x. Как мы знаем, тогда существует и $-\frac{dg(x)}{d(x^2)}$, которая является положительно определенной четной функцией. Рассмотрим теперь разность $-\left(\frac{dg(x)}{d(x^2)} - \frac{d\varphi(x)}{d(x^2)}\right)$. Функции $g(x)$ и $\varphi(x)$ будут также функциями от $u = x^2$, притом дифференцируемыми по u при $u \geqslant 0$. Разность $g(x) - \varphi(x)$ исчезает в любой окрестности нуля бесконечно много раз, и, по теореме Ролля, между двумя нулями этой разности будет лежать по крайней мере один нуль разности $-\left(\frac{dg(x)}{d(x^2)} - \frac{d\varphi(x)}{d(x^2)}\right)$, причем при внесении знака в скобки обе функции становятся положительно определенными. К ним приложимо предыдущее рассуждение, показывающее, что $\frac{d^2 g(x)}{(d(x^2))^2}$ существует и положительно определена, и при этом первые и вторые производные по x^2 при $x^2 = 0$ у $g(x)$ и $\varphi(x)$ совпадают. Продолжая эти рассуждения далее, мы докажем, что $g(x)$ имеет все производные по x^2 совпадающими при $x = 0$ с таковыми же для $\varphi(x)$, притом все эти производные непрерывны при всех действительных x. Отсюда легко следует, что все производные по x: $\frac{d^\nu g(x)}{dx^\nu}$ совпадают при $x = 0$ с соответствующими производными $\frac{d^\nu \varphi(x)}{dx^\nu}$. В силу положительной определенности $g(x)$, она должна быть голоморфной и совпадающей с $\varphi(x)$, что доказывает нашу лемму.

9. Переходим к доказательству теоремы 3.

Пусть $f(t)$ — вполне симметрическая плотность с ограниченной вариацией в окрестности нуля; мы имеем

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t-\xi)\, p(\xi)\, d\xi, \tag{9.1}$$

где $p(x)$ и $f(x)$, как плотности вероятности, принадлежат $L_1(-\infty, \infty)$. Далее, имеем

$$p(x) \in L_2(-\infty, \infty).$$

Если $\pi(t)$ — характеристическая функция для плотности $p(x)$, то

$$|\pi(u)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{itu}\, dt.$$

Применим теперь теорему (Е. Титчмарш, [2] стр. 58, теорема 23):

Пусть $f(t) \in L_1(-\infty, \infty)$ и $f(t)$ ограниченной вариации в окрестности точки $t = x$. Тогда

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \frac{1}{2\pi} \lim_{\lambda \to \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixu}\, du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{iut} dt. \qquad (9.2)$$

Положим $x = 0$, так что условие теоремы выполнено. Тогда получим

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\lambda \to \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} |\pi(u)|^2\, du, \qquad (9.3)$$

откуда

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\pi(u)|^2\, du. \qquad (9.4)$$

Таким образом, $|\pi(u)|^2 \in L_1(-\infty, \infty)$; и мы имеем тогда: $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixu} |\pi(u)|^2\, du$. В силу четности $f(x)$ имеем

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixu} |\pi(u)|^2\, du, \qquad (9.5)$$

где интеграл сходится абсолютно, так что $f(x)$ — положительно определенная.

Пусть $y(x)$ — голоморфное на всей действительной оси вполне симметрическое решение (5.6) (например, нормальная плотность с нулевым средним). Очевидно, оно будет ограниченной вариации в окрестности $x = 0$.

Погрузим $y(x)$ в класс плотностей $f(x)$, вполне симметрических и ограниченной вариации в окрестности $x = 0$. Будем доказывать единственность решения $y(x)$ в этом классе.

Пусть $f(x)$ — другое решение (5.6) из этого класса. Составим разность $f(x) - y(x) = \eta_0(x)$. Если эта разность обращается в нуль бесконечно много раз во всякой окрестности $x = 0$, то, по лемме 2, в силу положительной определенности $f(x)$ и $y(x)$, они должны совпадать на всей оси, и единственность решения доказана. Далее, $\eta_0(0) = 0$. Допустим теперь, что существует окрестность нуля $[-\delta, \delta]$, где $\eta_0(x)$ обращается в нуль лишь при $x = 0$. Вводя, как в п. 6, функции $z(x) = y(\sqrt{|x|})$; $z_1(x) = f(\sqrt{|x|})$ на сегменте $[0, \delta^2]$, и пользуясь тем, что $\eta(x) = z_1(x) - z(x)$ будет сохранять знак на этом сегменте, мы докажем, на основании рас-

суждений п. п. 6 и 7 и на основании того факта, что $y(x) \not\equiv 0$ в некоторой окрестности нуля, как это видно из представления (9.1), что $\eta(x) \equiv 0$ в некотором сегменте $[0, \delta_1]$, а стало быть, и в $[-\delta_1, \delta_1]$. Но тогда $f(x) = y(x)$ при $x \in [-\sqrt{\delta_1}, \sqrt{\delta_1}]$ и, в силу леммы 2, эти функции совпадают на всей оси. Этим теорема 3 доказана. Теорема 3′ является ее частным случаем.

10. Если исходная величина $\vec{X}$ является случайным m-мерным вектором, то, вообще говоря, для ее определения нужно знание распределения m различных определенных статистик. При довольно общих условиях доказывается аналог уравнения (5.5). Классы, в которых надлежит выделять решения, можно обобщить следующим образом. Если $y(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ — плотность распределения вектора $\vec{X}$, то рассматривается функция $y(\xi\xi_1, \ldots, \xi\xi_m)$ одного переменного ξ при фиксированных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$; на нее налагаются условия, введенные ранее при всевозможных наборах $\xi_1, \ldots, \xi_m$.

Для случая неопределенных статистик некоторых видов можно получить результаты, подобные теоремам 1 и 2, если наложить некоторые требования на скорость ухода поверхностей уровня в бесконечность. Кроме того, в некоторых случаях можно заменить исследование в окрестности точки $(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$ исследованием в окрестности бесконечно удаленной точки, тогда оказывается существенным поведение поверхности уровня в окрестности координатных плоскостей.

Поступила в редакцию
27. 10. 56

ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Мандельбройт, Квазианалитические классы функций, ОНТИ, 1937.
[2] Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, ГТТИ, 1948.

DETERMINING THE PROBABILITY DISTRIBUTION BY A STATISTIC'S DISTRIBUTION

Yu. V. LINNIK (LENINGRAD)

(*Summary*)

Let X be a real random variable with the distribution function $F(x) = \mathrm{P}(X < x)$ and $\vec{\xi} = (x_1, \ldots, x_n)$ the corresponding sample of size n (x_i being independent replicas of X).

A statistic $Q(\vec{\xi})$ is called definite if it is homogeneous of positive dimension and the level surfaces $Q(\vec{\xi}) = \mathrm{const}$ are continuous, piecewise smooth and star finite regions. A statistic $Q(\vec{\xi})$ is called defining in a class K of distribution functions $F(x)$, if the distribution $F_Q(x) = \mathrm{P}(Q < x)$, induced by $F(x)$, determines $F(x)$ in the class K. A definite statistic cannot be defining in general for the class K of all distribution functions, but it is defining in certain rather wide classes of symmetric distribution with densities. Three theorems are proved to this effect. The problem can be as a generalization of the classical moment problem, putting $Q(\vec{\xi}) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том I И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 4*
1956

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ЗАМЕЧАНИЕ К ТЕОРЕМЕ КРАМЕРА О РАЗЛОЖЕНИИ НОРМАЛЬНОГО ЗАКОНА

Ю. В. ЛИННИК

Известная теорема Г. Крамера (см. [1]) утверждает, что нормальные случайные величины могут быть разложены лишь на нормальные независимые слагаемые. С другой стороны, теорема Скитовича—Дармуа (см. [2], [3]) гласит, что в независимых линейных формах от независимых случайных величин слагаемые, имеющие в обоих формах ненулевые коэффициенты, нормальны.

В работе [4] дано обобщение теоремы Крамера в аналитическом направлении весьма просто приводящее к теореме Скитовича — Дармуа.

В настоящей заметке будет доказана эквивалентность теоремы Крамера одному весьма частному случаю теоремы Скитовича — Дармуа, который мы будем называть теоремой (А):

Пусть линейные формы:

$$L_1 = X_1 + \cdots + X_n;\ L_2 = b_1 X_1 + b_2 X_2 + \ldots + b_n X_n$$

от независимых слагаемых $X_1, \ldots, X_n$ *независимы, причем* $b_1, \ldots, b_n$ *— целые числа, и* $b_1 b_2 \ldots b_n \neq 0$. *Тогда* X_i *нормальны.*

Покажем, как из теоремы Крамера следует теорема (А).

Вводя характеристические функции $\varphi_j(t)$ для слагаемых X_j, записываем условие независимости в виде:

$$\prod_{j=1}^{n} \varphi_j(u + b_j v) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_j(u)\, \varphi_j(b_j v). \tag{2}$$

Равенство (2) легко обнаруживает, что $\varphi_j(t) \neq 0$ для всех действительных t. Полагая $\ln \varphi_j(t) = \psi_j(t)$, где $\ln \varphi_j(0) = 0$, записываем (2) в виде:

$$\sum_{j=1}^{n} \psi_j(u + b_j v) = A(u) + B(v). \tag{3}$$

Умножаем обе части (3) на $(x - u)$ и интегрируем по u от 0 до x, получая

$$\sum_{j=1}^{n} \int_0^x (x - u)\, \psi_j(u + b_j v)\, du = P(x), \tag{4}$$

где $P(x)$ — квадратный полином с коэффициентами, зависящими от v. Отсюда выводим:

$$\sum_{j=1}^{n} \int_0^{x + b_j v} (x + b_j v - \tau)\, \psi_j(\tau)\, d\tau = P_1(x), \tag{5}$$

где $P_1(x)$ — полином того же типа, что и $P(x)$. Левую часть можно дважды дифференцировать по v; так как $P_1(x)$ — полином, то его коэффициенты также должны быть дважды дифференцируемыми по v. Дифференцируя (5) дважды и полагая $v = 0$, находим:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j^2 \psi_j(x) = i\gamma x - cx^2; \qquad \gamma \text{ действительно; } c > 0.$$

Это означает, что

$$\prod_{j=1}^{n} [\varphi_j(x)]^{b_j^2} = e^{i\gamma x - cx^2}. \tag{6}$$

Так как b_j^2 — целые положительные числа, то $[\varphi_j(x)]^{b_j^2}$ суть характеристические функции, и из теоремы Крамера следует, что X_j нормальны, и. т. д.

Теорема Крамера следует из теоремы (A) значительно проще, что показывает, насколько более сильной является общая теорема Скитовича — Дармуа.

Пусть $Z = X + Y$ нормально, и X и Y — независимые случайные величины. Введем величины X', Y', распределенные соответственно, как X, Y, и такие, что X, Y, X', Y' независимы в совокупности. Положим: $Z' = X' + Y'$ и составим величины:

$$L_1 = Z + Z' = X + Y + X' + Y'; \quad L_2 = Z - Z' = X + Y - X' - Y'. \tag{7}$$

Ввиду нормальности и независимости Z и Z' величины L_1 и L_2 нормальны в совокупности. Далее, легко подсчитываем, что $\mathbf{M}(L_1 L_2) = 0$, так что L_1 и L_2 некоррелированы, и в силу их нормальности в совокупности — независимы. Но тогда из теоремы (A) следует нормальность X и Y, что и составляет теорему Крамера.

Поступила в редакцию
27. 10. 56

ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Cramer, Über eine Eigenschaft der normalen Verteilungsfunktion, Math. Zeitschr., **41** (1936), 405—414.
[2] В. П. Скитович, Об одном свойстве нормального распределения, ДАН СССР, **89**, (1953), 217—219.
[3] G. Darmois, Analyse générale des liaisons stochastiques, Rev. Inst. Intern. Stat., **21** (1953), 2—8.
[4] А. А. Зингер и Ю. В. Линник, Об одном аналитическом обобщении теоремы Крамера и его применении, Вестник Ленингр. университета, **11** (1955), 51—56.

A REMARK ON CRAMER'S THEOREM ON THE DECOMPOSITION OF THE NORMAL LAW

Yu. V. LINNIK (*LENINGRAD*)

(*Summary*)

H. Cramer's theorem is shown to be an equivalent of a particular case of Skitovič — Darmois' theorem on the independence of linear statistics. This means that each one of these theorems can be deduced from the other by a short elementary argument.

ПРИМЕР СЧЕТНОГО ОДНОРОДНОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА, ВСЕ СОСТОЯНИЯ КОТОРОГО ЯВЛЯЮТСЯ МГНОВЕННЫМИ*

Р. Л. ДОБРУШИН

1. Как известно, однородный марковский процесс со счетным числом состояний E_i; $i = 1, 2, \ldots$ задается вероятностями перехода $p_i^j(t)$, $0 \leqslant t < \infty$; $i, j = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющими условиям

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_i^j(t) = 1, \quad \sum_{j=0}^{\infty} p_i^j(t)\, p_j^k(t) = p_i^k(s+t). \tag{1}$$

Как показали Дуб [1] и Колмогоров [2], из предположения непрерывности вероятностей перехода

$$\lim_{t \to 0} p_i^j(t) = p_i^j(0) = \delta_i^j \tag{2}$$

(здесь $\delta_i^j = 0$ при $i \neq j$, $\delta_i^i = 1$) вытекает существование производных

$$a_i = \lim_{t \to 0} \frac{1 - p_i^i(t)}{t}, \quad a_i^j = \lim_{t \to 0} \frac{p_i^j(t)}{t} \ (i \neq j). \tag{3}$$

Величины a_i называются плотностями вероятностей выхода, а a_i^j — плотностями вероятностей перехода.

В случае, когда число состояний конечно, $a_i < \infty$, $a_i^j < \infty$, $a_i = \sum_j a_i^j$, и величины a_i^j однозначно задают вероятности перехода $p_i^j(t)$. В общем случае $a_i^j < \infty$, но $a_i \leqslant \infty$.

Если рассмотреть сепарабельный процесс, соответствующий заданным вероятностям перехода, такой, что в момент 0 система находится в i-ом состоянии, то математическое ожидание времени, которое пройдет до первого выхода из i-го состояния, равно $1/a_i$ (см. [1]). При $a_i = \infty$ (в этом случае состояние E_i называют мгновенным) совокупность моментов времени, которые система проводит в i-м состоянии, оказывается нигде не плотным множеством положительной меры (см. [3]). Пример процесса, имеющего одно мгновенное состояние, был построен строго Колмогоровым [2]. На более интуитивном уровне эти процессы подробно обсуждались Леви [3]. В частности, Леви утверждает, что не может существовать процесс, все состояния которого мгновенны. Это утверждение Леви было поддержано недавно в работе Чжуна [4]. А. А. Юшкевич указал, что доказательство Леви ошибочно.

Цель этой заметки — построение цепи, для которой $a_i = \infty$ при всех i. В отличие от работы Колмогорова, где для построения примера используются некоторые аналитические соображения, наш пример будет построен прямым вероятностным методом, путем предельного перехода от цепи с конечным числом состояний.

2. Опишем наглядно идею дальнейших построений. Мы будем строить последовательность однородных конечных цепей Маркова такую, что n-я цепь содержит 2^n состояний. Если n-я цепь уже построена, то $(n+1)$-я цепь строится путем выделения из каждого состояния α старой цепи нового состояния $\bar{\alpha}$ таким образом, что если вновь объединить эти пары состояний, то возникает первоначальная цепь. При этом $a_{\alpha}^{\bar{\alpha}} = 1$ и $a_{\bar{\alpha}}^{\alpha} = a_n$ при всех α, где $a_n \to \infty$ при $n \to \infty$ достаточно быстрым образом. В пределе при $n \to \infty$ получается интересующий нас объект.

3. Докажем простую, но существенную для наших целей лемму.

Лемма. *Пусть задан стационарный марковский процесс* $x(t, \omega)$, $0 \leqslant t < \infty$, $\omega \in \Omega$, *где* Ω *— пространство элементарных событий, с конечным числом состояний* $E_1, \ldots, E_N$. *Пусть*

$$p_i = \mathbf{P}\{x(t, \omega) = E_i\} > 0; \ i = 1, \ldots, N$$

и

$$p_{ij}(t) = \mathbf{P}\{x(s+t, \omega) = E_j \mid x(s) = E_i\}$$

* После сдачи этой работы в печать появилась работа [5], в которой интересующий нас пример строится другим методом.

и пусть

$$a_\alpha = \lim_{t\to 0} \frac{1 - p_\alpha^\alpha(t)}{t}, \tag{4}$$

$$a_\alpha^\beta = \lim_{t\to 0} \frac{p_\alpha^\beta(t)}{t} \quad (\alpha \neq \beta).$$

Пусть теперь для некоторого m существуют числа $\bar{a}_\beta$ $(\beta = 1, \dots, m)$, такие что

$$a_\alpha^\beta = \bar{a}_\beta, \ \alpha = m+1, \dots, N; \ \beta = 1, \dots, m. \tag{5}$$

Пусть функция $f(E_i)$ определена отношениями

$$\begin{aligned} f(E_i) &= E_i; \ i = 1, \dots, m, \\ f(E_i) &= E_{m+1}; \ i = m+1, \dots, N. \end{aligned} \tag{6}$$

Тогда процесс $\tilde{x}(t, \omega) = f(x(t, \omega))$ является стационарным марковским процессом с состояниями $E_1, \dots, E_{m+1}$, и соответствующие плотности вероятностей перехода $\tilde{a}_\alpha^\beta$ задаются как

$$\begin{aligned} \tilde{a}_\alpha^\beta &= a_\alpha^\beta, \ \alpha \leqslant m, \ \beta \leqslant m, \\ \tilde{a}_\alpha^{m+1} &= \sum_{k=m+1}^{N} a_\alpha^k, \ a_{m+1}^\alpha = \bar{a}_\alpha. \end{aligned} \tag{7}$$

Стационарные вероятности состояний p_α и $\tilde{p}_\alpha$ связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \tilde{p}_\alpha &= p_\alpha, \ \alpha \leqslant m, \\ \tilde{p}_{m+1} &= \sum_{\alpha=m+1}^{N} p_\alpha. \end{aligned} \tag{8}$$

Доказательство. Заметим, во-первых, что из условий (5) следует, что в каком бы из состояний E_i; $i = m+1, \dots, N$ система ни находилась в начальный момент времени, будет одним и тем же распределение вероятностей для момента τ ее первого попадания в одно из состояний E_j, $j \leqslant m$ и для состояния, в которое она попадает в момент τ. Отсюда следует, что $p_{ij}(t) = p_{kj}(t)$ при всех t, $i > m$, $k > m$, $j \leqslant m$.

Исходя из этого факта, легко проверить выполнение для процесса $\tilde{x}(t, \omega)$ условия Маркова. Стационарность процесса $\tilde{x}(t, \omega)$ и соотношения (7) и (8) очевидны.

4. Перейдем к построению примера. Нам будет удобно нумеровать состояния n-й цепи системой индексов как

$$E_{i_1, \dots, i_m},$$

где $1 \leqslant i_1 < \dots < i_m \leqslant n$, а m принимает значения $0, 1, \dots, n$ (таким образом, одно из состояний цепи занумеровано пустым множеством индексов $\varnothing$). Систему индексов, задающих состояние, мы будем там, где это удобно, обозначать одной греческой буквой. Зададим последовательность положительных чисел r_n такую, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/r_n = \infty. \tag{9}$$

Построение будет вестись по индукции. Цепь с номером n мы будем задавать при помощи плотностей вероятностей перехода ${}^{(n)}a_\alpha^\beta$. Мы начнем с цепи с номером 0, содержащей единственное состояние $\varnothing$. (Такая цепь определяется однозначно; плотностей вероятностей перехода a_α^β здесь нет.) Пусть уже задана $(n-1)$-я цепь.

Тогда n-я цепь содержит состояния вида E_α и вида $E_{\alpha,n}$, где $\alpha = (i_1, \dots, i_m)$, $i_m \leqslant n-1$. Положим

$$
{}^{(n)}a_\alpha^\beta = {}^{(n)}a_{\alpha,n}^\beta = {}^{(n-1)}a_\alpha^\beta \frac{r_n}{1+r_n}, \tag{10}
$$

$$
{}^{(n)}a_\alpha^{\beta,n} = {}^{(n)}a_{\alpha,n}^{\beta,n} = {}^{(n-1)}a_\alpha^\beta \frac{1}{1+r_n},
$$

$$
(\alpha = (i_1, \dots, i_{m_\alpha}),\ i_{m_\alpha} \leqslant n-1,\ \beta = (j_1, \dots, j_{m_\beta}),\ j_{m_\beta} \leqslant n-1,\ \alpha \neq \beta),
$$

$$
{}^{(n)}a_\alpha^{\alpha,n} = 1,
$$

$$
{}^{(n)}a_{\alpha,n}^{\alpha} = r_n.
$$

5. Очевидно, что все построенные нами цепи Маркова являются цепями с одним классом состояний. Поэтому стационарные вероятности ${}^{(n)}p_\alpha$ состояния E_α в n-й цепи однозначно определяются системой линейных уравнений

$$
{}^{(n)}p_\alpha \sum_\beta {}^{(n)}a_\alpha^\beta = \sum_\beta {}^{(n)}p_\beta\, {}^{(n)}a_\beta^\alpha. \tag{11}
$$

(Здесь α и β — всевозможные состояния n-й цепи и $\alpha \neq \beta$.) В дальнейшем мы будем считать n-ю цепь стационарной и обозначать ее выборочные функции как ${}^{(n)}x(t, \omega)$. Введем функцию ${}^{(n)}f(E_\alpha)$, где E_α — состояния n-й цепи, положив при $\alpha = (i_1, \dots, i_m)$

$$
{}^{(n)}f(E_\alpha) = \begin{cases} E_\alpha & \text{при } i_m < n, \\ E_{i_1,\dots,i_{m-1}} & \text{при } i_m = n. \end{cases} \tag{12}
$$

Применяя многократно нашу лемму и учитывая, что в соответствии с (10) для любого $\alpha = (i_1, \dots, i_m)$, где $i_m < n$, и любого β ($\beta \neq \alpha$, $\beta \neq (\alpha, n)$) плотности $a_\alpha^\beta = a_{\alpha,n}^\beta$, находим, что процесс ${}^{(n)}f({}^{(n)}x(t, \omega))$ является стационарной цепью Маркова. Сравнивая (7) и (10), обнаруживаем, что переходные вероятности вновь полученной цепи совпадают с переходными вероятностями $(n-1)$-й из построенных нами цепей.

Точно так же, если определить функцию ${}^{(n)}_{(m)}f(E_\alpha)$, $0 \leqslant m < n$, заданную на состояниях E_α n-й цепи и переводящую E_α в состояние m-й цепи, получаемое при отбрасывании в α всех индексов больших m, то процесс ${}^{(n)}_{(m)}f({}^{(n)}x(t, \omega))$ сводится к m-й из наших цепей Маркова.

6. Мы хотим теперь вычислить стационарные вероятности ${}^{(n)}p_\alpha$. Из (8) следует, что для $\gamma = (i_1, \dots, i_m)$, $i_m \leqslant n-1$

$$
{}^{(n)}p_\gamma + {}^{(n)}p_{\gamma,n} = {}^{(n-1)}p_\gamma. \tag{13}
$$

Далее, используя соотношение (11) для $\alpha = \gamma$, $\alpha = (\gamma, n)$, легко обнаружить при помощи алгебраических преобразований, что

$$
{}^{(n)}p_\gamma = r_n\, {}^{(n)}p_{\gamma,n}. \tag{14}
$$

Учитывая, что ${}^{(0)}p_\varnothing = 1$, находим из (13) и (14), что при $\alpha = (i_1, \dots i_m)$

$$
{}^{(n)}p_\alpha = \frac{\prod_{k=1}^{m} \frac{1}{r_{i_k}}}{\prod_{i=1}^{m} \left(1 + \frac{1}{r_i}\right)}. \tag{15}
$$

Заметим, что для любого набора индексов $\alpha = (i_1, \dots, i_m)$, где $i_1 < i_2 < \dots < i_m$, $m = 0,1, \dots$ существует предел

$$p_\alpha = \lim_{n\to\infty} {}^{(n)}p_\alpha = \frac{\prod_{k=1}^{m} \frac{1}{r_{i_k}}}{\prod_{i=1}^{\infty}(1 + 1/r_i)}. \tag{16}$$

В соответствии с (9) все $p_\alpha > 0$. Ясно, что

$$\sum_\alpha p_\alpha = 1 \tag{17}$$

и что поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \sum_\alpha | p_\alpha^{(n)} - p_\alpha | = 0 \tag{18}$$

(мы считаем здесь $p_\alpha^{(n)} = 0$, если оно не определено).

7. Обозначим через ${}^{(n)}p_\alpha^\beta(t)$ переходные вероятности n-й цепи. Мы покажем теперь, что существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} {}^{(n)}p_\alpha^\beta(t) = p_\alpha^\beta(t), \tag{19}$$

удовлетворяющие условиям (1) и (2), чтобы затем принять эти величины за переходные вероятности искомой цепи со счетным числом состояний. Заметим, что из (17) и (18) вытекает

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \sum_\alpha {}^{(n)}p_\alpha = 0, \tag{20}$$

где $m < n$ и $\alpha = (i_1, \dots, i_s)$, $m < i_s \leqslant n$. Отсюда равномерно по всем t, $0 \leqslant t < \infty$

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \mathbf{P}\{{}^{(n)}_{(m)}f({}^{(n)}x(t, \omega)) \neq {}^{(n)}x(t, \omega)\} = 0. \tag{21}$$

Значит, равномерно по всем t

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \mathbf{P}\{[{}^{(n)}_{m}f({}^{n}x(0, \omega)) \neq {}^{(n)}x(0, \omega)] \cup [{}^{(n)}_{m}f({}^{(n)}x(t, \omega) \neq {}^{(n)}x(t, \omega)]\} = 0. \tag{22}$$

Вспомнив замечания, сделанные в пункте 5, видим, что из (22) следует, что равномерно по s и t

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \sum_{\alpha,\beta} | {}^{(n)}p_\alpha \, {}^{(n)}p_\alpha^\beta(t) - {}^{(m)}p_\alpha \, {}^{(m)}p_\alpha^\beta(t) | = 0, \tag{23}$$

где α и β — всевозможные состояния предельной цепи, и вероятности, которые не определены, считаются равными нулю. Так как ${}^{(n)}p_\alpha \to p_\alpha > 0$, то из (22) следует, что равномерно по t при любом α

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \sum_\alpha | {}^{(n)}p_\alpha^\beta(t) - {}^{(m)}p_\alpha^\beta(t) | = 0. \tag{24}$$

Отсюда следует существование пределов (19) и равенство

$$\sum_\beta p_\alpha^\beta(t) = 1.$$

Далее, ясно, что при любом α

$$\lim_{n\to\infty} \sum_\beta | {}^{(n)}p_\alpha^\beta(t) - p_\alpha^\beta(t) | = 0. \tag{25}$$

Отсюда вытекает выполнение для $p_\alpha^\beta(t)$ основного уравнения цепи Маркова (1).

Непрерывность вероятностей перехода $p_\alpha^\beta(t)$ (т. е. условие (2)) следует из равномерности предельного перехода.

8. Убедимся теперь, что построенная цепь Маркова состоит из одних мгновенных состояний. В самом деле, из результатов пункта 5 следует, что при всех n, t и α

$$^{(n)}p_\alpha^\alpha(t) \geqslant p_\alpha^\alpha(t),$$

если только левая часть определена. Однако из построений пункта 4 видно, что при любых α и n плотность вероятности выхода $^{(n)}a_\alpha = n$ (если только $^{(n)}p_\alpha^\alpha(t)$ определена). Значит, всегда существующая в соответствии с теоремой Дуба плотность вероятности выхода a_α должна быть больше любого достаточно большого n, т. е. должна быть бесконечна.

Поступила в редакцию
20. 12. 55

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. L. Doob, Stochastic processes, New York— London, 1953.
[2] А. Н. Колмогоров, К вопросу о дифференцируемости переходных вероятностей в однородных по времени процессах Маркова со счетным числом возможных состояний, Уч. зап. МГУ, матем. 4, вып. 148 (1951), 53—59.
[3] P. Lévy, Systèmes markoviens et stationaires; cas denombrables, Ann. Ec. Norm. Sup., 68 (1951), 327—380.
[4] K. L. Chung, Some new developments in Markov Chains, Trans. Am. Math, Soc., 81, № 1 (1956), 195—210.
[5] W. Feller, Mc Kean Henry, A diffusion equivalent to a countable Markov chains, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 42, № 6 (1956), 351—354.

AN EXAMPLE OF A COUNTABLE HOMOGENEOUS MARKOV PROCESS ALL STATES OF WHICH ARE INSTANTANEOUS

R. L. DOBRUSHIN (MOSCOW)

(*Summary*)

An example of a homogeneous Markov process is composed with a countable set of states, all densities of outcome probabilities of which are infinite.

ОДНА ТЕОРЕМА ИЗ ТЕОРИИ БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫХ ЗАКОНОВ

И. А. ИБРАГИМОВ

Обозначим через $\mathfrak{F}$ класс безгранично делимых функций распределения (ф. р.) F таких, что из $F \in \mathfrak{F}$ и $F(x) * H(x) = Q(x)$, где $Q(x)$ — безгранично делимая ф. р., следует, что и $H(x)$ безгранично делима. Имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Класс* $\mathfrak{F}$ *совпадает с совокупностью всех нормальных распределений.*

Доказательство. Пусть $f(t)$, $h(t)$, $q(t)$ — характеристические функции соответственно $F(x)$, $H(x)$, $Q(x)$.

Пусть сначала

$$f(t) = e^{iat} e^{-\frac{\sigma^2}{2} t^2}.$$

Допустим, что $h(t)$ — не безгранично делимая, хотя $q(t)$ — безгранично делима. Используя формулу Леви — Хинчина (см. [1]), можно написать:

$$\log h(t) = i(\gamma - a)t + \frac{t^2}{2}[\sigma^2 - (G(+0) - G(-0))] +$$
$$+ \int \left\{ e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right\} \frac{1+u^2}{u^2} dG_0(u),$$
$$\sigma^2 - (G(+0) - G(-0)) = \sigma_0^2 > 0,$$

где $G_0(u)$ — неубывающая функция ограниченной вариации, непрерывная в точке $u = 0$.

Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы

$$G_0(\varepsilon) - G_0(-\varepsilon) < \frac{1}{2}\,\sigma_0^2,$$
$$\varepsilon < 1.$$

Имеют место оценки

$$\left|\operatorname{Re}\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon}\left\{e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right\}\frac{1+u^2}{u^2}\,dG_0(u)\right| \leqslant \frac{4}{\varepsilon^2}\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} dG_0,$$

$$\left|\operatorname{Re}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\left\{e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right\}\frac{1+u^2}{u^2}\,dG_0(u)\right| \leqslant \frac{t^2}{2}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dG_0 + \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dG_0,$$

$$\left|\operatorname{Re}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\left\{e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right\}\frac{1+u^2}{u^2}\,dG_0(u)\right| \leqslant \frac{4}{\varepsilon^2}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty} dG_0.$$

Поэтому

$$\operatorname{Re}\log h(t) > \frac{\sigma_0^2}{4}\,t^2 - \frac{4}{\varepsilon^2}\int dG_0 \to \infty \text{ при } t \to \infty$$

А это, очевидно, невозможно, ибо всегда

$$|h(t)| \leqslant 1.$$

Пусть $f(t)$ — безгранично делимая характеристическая функция, не являющаяся нормальной. В силу формулы Леви — Хинчина

$$\log f(t) = i\gamma_1 t + \int\left\{e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right\}\frac{1+u^2}{u^2}\,dG_1(u),$$

где $G_1(u)$ — неубывающая функция ограниченной вариации, причем существует промежуток $[a, b]$, в котором функция $G_1(u)$ возрастает и который целиком лежит правее или левее нуля. Точно так же

$$\log g(t) = i\gamma_2 t + \int\left\{e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right\}\frac{1+u^2}{u^2}\,dG_2(u),$$

поэтому и

$$\log h(t) = i(\gamma_2 - \gamma_1)\,t + \int\left\{e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right\}\frac{1+u^2}{u^2}\,d(G_2(u) - G_1(u)).$$

Нам нужно выбрать $G_2(u)$ так, чтобы функция

$$G_3(u) = G_2(u) - G_1(u)$$

не была монотонной, тогда (см. [1]) $h(t)$ не будет безгранично делимой характеристической функцией.

Мы будем добиваться немонотонности $G_3(u)$, выбирая $G_2(u)$ так, чтобы в некоторой части $[a, b]$ функция $G_2(u)$ возрастала достаточно слабо в сравнении с $G_1(u)$. Кроме того, чтобы обеспечить положительную определенность $h(t)$, мы будем требовать, чтобы $G_3(u)$ была достаточно близка к некоторой специальным образом выбранной монотонной функции.

При построении $G_2(u)$ нам будет удобнее различать два случая:

1) $G_1(u)$ непрерывна в $[a, b]$;

2) существует точка $u_0 \in [a, b]$, для которой

$$G_1(u_0 + 0) - G_1(u_0 - 0) = h_0 > 0.$$

Рассмотрим сначала 1-й случай. В этом случае для всякого как угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется промежуток $[\alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon)] \subset [a, b]$, для которого

$$0 < \int\limits_{\alpha(\varepsilon)}^{\beta(\varepsilon)} dG_1(u) < \varepsilon,$$
$$0 < \beta(\varepsilon) - \alpha(\varepsilon) < \varepsilon.$$

Введем функцию $G_4(u, \varepsilon)$, определяя ее следующим образом:

$$\begin{aligned} G_4(u, \varepsilon) &= G_1(u) && \text{для } u \leqslant \alpha(\varepsilon), \\ G_4(u, \varepsilon) &= G_1(\alpha(\varepsilon)) && \text{для } \alpha(\varepsilon) < u \leqslant \beta(\varepsilon), \\ G_4(u, \varepsilon) &= G_1(u) && \text{для } u > \beta(\varepsilon). \end{aligned}$$

Известно, что $e^{-|t|}$ — безгранично делимая характеристическая функция, поэтому

$$-|t| = \int \left\{ e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right\} \frac{1+u^2}{u^2}\, dG_5(u),$$

причем здесь $G_5(u)$ непрерывна. Положим

$$\begin{aligned} G_6(u, \varepsilon) &= G_5(u), \quad 0 \leqslant \lambda_1(\varepsilon), \\ G_6(u, \varepsilon) &= G_5(\lambda_1(\varepsilon)), \quad \lambda_1(\varepsilon) < u \leqslant \lambda_2(\varepsilon), \\ G_6(u, \varepsilon) &= G_5(u), \quad u > \lambda_2(\varepsilon). \end{aligned}$$

Промежуток $[\lambda_1(\varepsilon), \lambda_2(\varepsilon)]$ выбирается так, чтобы

$$\begin{gathered} 0 \overline{\in} [\lambda_1(\varepsilon), \lambda_2(\varepsilon)], \\ [\alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon)] \subset [\lambda_1(\varepsilon), \lambda_2(\varepsilon)], \\ \int_{\lambda_1(\varepsilon)}^{\lambda_2(\varepsilon)} dG_5(u) < \int_{\alpha(\varepsilon)}^{\beta(\varepsilon)} dG_5(u) + \varepsilon. \end{gathered}$$

Покажем, что за $G_2(u)$ можно взять одну из функций $G_6(u, \varepsilon) + G_4(u, \varepsilon)$, если только ε выбрано достаточно малым. Пусть

$$h(t, \varepsilon) = \exp\left\{ i(\gamma_2 - \gamma_1)t + \int \left\{ e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right\} \frac{1+u^2}{u^2}\, d\left(G_6(u, \varepsilon) + G_4(u, \varepsilon) - G_1(u)\right) \right\}.$$

Ясно, что $G_6(u, \varepsilon) + G_4(u, \varepsilon) - G_1(u)$ не монотонная функция, так что $h(t, \varepsilon)$ не может быть безгранично делимой. Остается только проверить, что при малых ε $h(t, \varepsilon)$ действительно будет характеристической фукцией. Можно написать, что

$$h(t, \varepsilon) = A \exp\left\{ i(\gamma_2 - \gamma_1 + \lambda)t - |t| + \int e^{itu} dF_1(u, \varepsilon) + \int e^{itu} dF_2(u, \varepsilon) \right\},$$

где

$$\begin{aligned} F_1(u, \varepsilon) &= G_4(u, \varepsilon) - G_1(u), \\ F_2(u, \varepsilon) &= G_6(u, \varepsilon) - G_5(u), \\ A &= -\int \frac{1+u^2}{u^2}\, d\left(F_1(u, \varepsilon) + F_2(u, \varepsilon)\right), \\ \lambda &= -\int \frac{1}{u}\, d\left(F_1(u, \varepsilon) + F_2(u, \varepsilon)\right). \end{aligned}$$

Для доказательства положительной определенности $h(t, \varepsilon)$ нам достаточно обнаружить, что при малых ε для всех x

$$\begin{gathered} y(x) = \int e^{-itx} h_1(t)\, dt \geqslant 0, \\ h_1(t) = \exp\left\{ -|t| + \int e^{itu} dF_1 + \int e^{itu} dF_2 \right\}. \end{gathered}$$

Нетрудно видеть, что

$$y(x) = 2 \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-itx} h_1(t)\, dt.$$

Исследуем сначала поведение $y(x)$ при больших x и докажем, что $y(x) \geqslant 0$, если $|x| \geqslant K$, где K—некоторое положительное число, затем мы покажем, что при достаточно малых ε $y(x) \geqslant 0$ и для $|x| \leqslant K$.

Асимптотическое выражение для $y(x)$ можно найти, используя метод Ю. В. Линника (см. [2]).

Будем считать $x > 0$ (случай, когда $x < 0$, разбирается аналогично). Пусть, кроме того, $\varepsilon < 1$. Функция

$$s(w) = \exp\left\{-w + \int e^{iwu} dF_1(u, \varepsilon) + \int e^{iwu} dF_2(u, \varepsilon)\right\}$$

— целая функция комплексного переменного $w = \sigma + i\tau$. Ввиду этого, как и в [2], можно доказать, что

$$\int_0^\infty e^{-itx} h_1(t)\, dt = \int_{L_1} e^{-iwx} s(w)\, dw + \int_{L_2} e^{-iwx} s(w)\, dw,$$

где L_1 — отрезок мнимой оси $\sigma = 0$, $0 \geqslant \tau \geqslant \Gamma(x) - \dfrac{\ln^2 x}{x}$, а L_2 — полупрямая $\tau = \Gamma(x)$, $0 \leqslant \delta < \infty$.

Имеем далее

$$\left|\int_{L_2} e^{-iwt} s(w)\, dw\right| = \left|\int_0^\infty e^{-i(\sigma+i\Gamma(x))x} e^{-(\sigma+i\Gamma(x))} e^{\int e^{i(\sigma+i\Gamma(x))u} d(F_1+F_2)}\, d\sigma\right| \leqslant$$

$$\leqslant \exp[-\ln^2 x] \cdot \exp\left[\left|\int e^{\frac{\ln^2 x}{x} u} dF_1\right| + \left|\int e^{\frac{\ln^2 x}{x} u} dF_2\right|\right]. \tag{1}$$

Перейдем теперь к интегралу по L_1. Ниже мы везде будем предполагать, не оговаривая этого особо, что x выбрано достаточно большим.

Заметим сначала, что при больших x и всех τ таких, что $0 \leqslant \tau \leqslant \dfrac{\ln^2 x}{x}$, будет

$$\exp\left[-2\int |d(F_1(u, \varepsilon) + F_2(u, \varepsilon)|\right] \leqslant \exp\left[\int e^{u\tau} d(F_1(u, \varepsilon) + F_2(u, \varepsilon))\right] \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left[2\int |d(F_1(u, \varepsilon) + F_2(u, \varepsilon))|\right]. \tag{2}$$

Имеем далее

$$\operatorname{Re}\int_{L_1} e^{-iwx} s(w)\, dw = \operatorname{Re}\int_0^{-\Gamma(x)} e^{-\tau x} \tau e^{\int e^{u\tau} d(F_1+F_2)}\, d\tau -$$

$$- \operatorname{Re}\int_0^{-\Gamma(x)} ie^{-\tau x}(e^{i\tau} - 1 - i\tau) e^{\int e^{iu\tau} d(F_1+F_2)}\, d\tau.$$

Учитывая (2), будем иметь:

$$\operatorname{Re}\int_0^{-\Gamma(x)} e^{-\tau x} \tau e^{\int e^{u\tau} d(F_1+F_2)}\, d\tau \geqslant e^{-2\int |d(F_1+F_2)|} \int_0^{-\Gamma(x)} e^{-\tau x} \tau\, d\tau,$$

$$\left|\int_0^{-\Gamma(x)} e^{-\tau x}(e^{i\tau} - 1 - i\tau) e^{\int e^{u\tau} d(F_1+F_2)}\, d\tau\right| \leqslant e^{2\int |d(F_1+F_2)|} \int_0^{-\Gamma(x)} e^{-\tau x} \frac{\tau^2}{2}\, d\tau.$$

Так как, наконец,

$$\int_{-\Gamma(x)}^\infty e^{-\tau x} \tau^k\, d\tau \leqslant e^{-\frac{1}{2}\ln^2 x}; \quad k = 1, 2.$$

получаем с учетом (1)

$$y(x) = 2\mathrm{Re}\int_0^\infty e^{-itx} h_1(t)\,dt \geqslant \frac{2}{x^2}\; e^{-2\int |d(F_1+F_2)|} - \frac{2}{x^3}\, e^{2\int |d(F_1+F_2)|} -$$

$$-4\exp\left[-\frac{1}{2}\ln^2 x\right]\cdot\exp\left[2\int |d(F_1+F_2)|\right] -$$

$$-2\exp\left[-\ln^2 x\right]\exp\left[\int e^{\frac{\ln^2 x}{x}u}\, d(F_1+F_2)\right] \geqslant 0,$$

если только x выбран достаточно большим. Аналогичные рассуждения для случая $x<0$ доказывают, что и вообще $y(x)\geqslant 0$, если $|x|\geqslant K$, где K — некоторое положительное число, не зависящее от ε ($\varepsilon<1$).

Теперь рассмотрим случай, когда $|x|\leqslant K$.

Заметим, что

$$\int |d(F_1(u,\varepsilon)+F_2(u,\varepsilon))| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

Поэтому при достаточно малых ε и всех t

$$\left|\exp\left[\int e^{itu} d(F_1(u,\varepsilon)+F_2(u,\varepsilon))\right]-1\right| \leqslant 2\int |d(F_1(u,\varepsilon)+F_2(u,\varepsilon))|.$$

Учитывая (3), получим

$$\mathrm{Re}\int_0^\infty e^{-itx} h_1(t)\,dt = \mathrm{Re}\int_0^\infty e^{-it}\; e^{-t}dt + \mathrm{Re}\int_0^\infty e^{-itx}e^{-t}\,(e^{\int e^{itu}\, d(F_1+F_2)}-1)\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{1+x^2} - 2\int |d(F_1(u,\varepsilon)+F_2(u,\varepsilon))| \geqslant 0,$$

если $|x|\leqslant K$, а ε взято достаточно малым.

Если имеет место 2-й случай, функцию $G_2(u)$ можно выбирать из числа функций

$$G_5(u)+G_7(u,\varepsilon),$$

если только ε взято достаточно малым.

Функция $G_7(u,\varepsilon)$ определяется следующим образом:

$$G_7(u,\varepsilon) = G_1(u), \quad u\leqslant u_0,$$
$$G_7(u,\varepsilon) = G_1(u) - h(\varepsilon), \quad u > u_0.$$

Здесь $h(\varepsilon)$ — некоторое число, такое, что

$$0 < h(\varepsilon) < h_0,$$
$$h_0 - h(\varepsilon) < \varepsilon.$$

Все дальнейшие рассуждения остаются такими же, что и выше.

Задача о выяснении объема класса $\mathfrak{F}$ была поставлена Р. Л. Добрушиным, Р. Л. Добрушин указал также на ряд неточностей, содержащихся в рукописи. Приношу ему глубокую благодарность.

Поступила в редакцию
9.6.56

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, Гостехиздат, М.— Л., 1949.

[2] Ю. В. Линник, Линейные формы и статистические критерии, Укр. матем. ж., 5, № 3 (1953), 247—289.

A THEOREM IN THE THEORY OF INFINITELY DIVISIBLE LAWS

I. A. IBRAGIMOV (LENINGRAD)

(*Summary*)

Let $\mathfrak{F}$ be a class of infinitely divisible distribution functions F for which, if

$$F\in\mathfrak{F} \text{ and } F * H = Q$$

where $Q(x)$ is an infinitely divisible distribution function, it follows that H is also an infinitely divisible distribution function. The following theorem is proved:

Class $\mathfrak{F}$ is identical to the set of all normal distributions.

СОДЕРЖАНИЕ ПЕРВОГО ТОМА

ВЫПУСК ПЕРВЫЙ

Хинчин А. Я. Потоки случайных событий без последействия 3
Khintchine A. Nachwirkungsfreie Folgen von zufälligen Ereignissen . . . 17
Cramer H. Ein Satz über geordnete Mengen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen 19
Крамер Г. Теорема об упорядоченных множествах с вероятностными распределениями 24
Дынкин Е. Б. Марковские процессы и полугруппы операторов 25
Dynkin E. B. Markov processes and semi-groups of operators 37
Дынкин Е. Б. Инфинитезимальные операторы марковских процессов 38
Dynkin E. B. Infinitesimal operators of Markov processes 59
Renyi A. On conditional probability spaces generated on a dimensionally ordered set of measures 61
Реньи А. О пространствах с условными вероятностями, порожденными размерностно-упорядоченным множеством мер 71
Добрушин Р. Л. Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова. I 72
Dobrushin R. L. Central limit theorem for non-stationary Markov chains. I . . 88
Takács L. On the sequence of events, selected by a counter from a recurrent process events 90
Такач Л. О последовательности событий, выбранных счетчиком из рекуррентного процесса событий. 102
Mihoc G. Sur les lois limites des variable vectorielles enchainèes au sens de Markoff 103
Михок Г. О предельных законах для случайных векторов, связанных в цепь Маркова. 112
Владимиров В. С. О применении метода Монте-Карло для отыскания наименьшего характеристического числа и соответствующей собственной функции линейного интегрального уравнения. 113
Vladimirov V. S. On the application of Monte-Carlo methods for obtaining the lower characteristics number and the corresponding eigenfunction for a linear integral equation 129
Туманян С. Х. Асимптотическое распределение критерия χ^2 при одновременном возрастании объема наблюдений и числа групп 131
Tumanyan S. H. Asymptotic distribution of χ^2 criterion when the size of observations and the number of groups simultaneously increase 145

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Урбаник К. Случайные процессы, реализации которых являются обобщенными функциями. 146
Urbanik K. Stochastic processes whose sample functions are distributions . . . 149
Дынкин Е. Б. и *Юшкевич А. А.* Строго марковские процессы 149
Dynkin E. B. and *Yushkevich A.* Strong Markov processes 155
Ченцов Н. Н. Слабая сходимость случайных процессов с траекториями без разрывов второго рода и так называемый «эвристический» подход к критериям согласия типа Колмогорова — Смирнова 155
Čentsov N. La convergence faible des processus stochastiques à trajectoires sans

discontinuités de seconde espèce et l'approche dite «heuristique» en tests du type de Kolmogorov — Smirnov 161
Яглом А. М. Применение функциональных интегралов к вычислению статистической суммы квантовой статистики 161
Yaglom A. M. Application of function space integrals to the evaluation of the statistical sum of quantum statistics 167
Сираждинов С. Х. Об оценках с наименьшим смещением при биномиальном распределении 168
Siraždinov S. H. Concerning estimations with minimum bias for a binomial distribution 174

ВЫПУСК ВТОРОЙ

Прохоров Ю. В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей 177
Prohorov Yu. V. Convergence of random processes and limit theorems in probability theory 238
Колмогоров А. Н. О сходимости А. В. Скорохода 239
Kolmogorov A. N. On the Skorohod convergence 247
Петров А. А. Проверка статистических гипотез о типе распределения по малым выборкам 248
Petrov A. A. Verification of statistical hypotheses on the type of a distribution based on small samples 270

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Джемс-Леви Г. Е. Номограмма для интегрального закона распределения Стьюдента 272
James-Levy G. E. A nomogram for the integral law of Student's distribution . . 273
Ососков Г. А. Одна предельная теорема для потоков однородных событий . . . 274
Ossoskow G. A. Ein Grenztheorem für Folgen gleichartiger Ereignisse 282
Ибрагимов И. А. О композиции одновершинных распределений 283
Ibragimov J. A. On the composition of unimodal distributions 288

ВЫПУСК ТРЕТИЙ

Скороход А. В. Предельные теоремы для случайных процессов 289
Skorohod A. V. Limit theorems for stochastic processes 319
Хинчин А. Я. О пуассоновских потоках случайных событий 320
Khintchine A. Über poissonsche Folgen zufälliger Ereignisse 326
Монин А. С. Статистическая интерпретация рассеяния микрочастиц 328
Monin A. S. A statistical interpretation of the dispersion of mikroparticles . . 343

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Гихман И. И. Об асимптотических свойствах некоторых статистик, аналогичных величине χ^2 344
Gichman J. J. On asymptotic properties of certain statistics similar to χ^2 . . . 348
Петров В. В. Локальная теорема для плотностей независимых случайных величин 349
Petrov V. V. A local theorem for densities of sums of independent random variables 356
Сакович Г. Н. Единая форма условий притяжения к устойчивым законам . . . 357
Sakovič G. N. Notwendige und hinreichende Bedingungen der Attraktion an stabilen Verteilungen in einheitlicher Form 361
Скитович В. П. Об одной характеризации брауновского движения. 361
Skitovič V. P. On characterizing Brownian motion 364

ВЫПУСК ЧЕТВЕРТЫЙ

Добрушин Р. Л. Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова. II 365
Dobrushin R. L. Central limit theorem for non-stationary Markov chains. II . 425

Колмогоров А. Н. Две равномерные предельные теоремы для сумм независимых слагаемых 426
Kolmogorov A. N. Deux théorémes asimptotiques uniformes pour des sommes des variablès aléatoires 436
Михалевич В. С. Последовательные байесовские решения и оптимальные методы приемочного ститистического контроля 437
Michalevič V. S. Consecutive Bayes' solutions and optimal methods of statistical acceptance control 465
Линник Ю. В. К вопросу о нахождении генерального распределения по распределению статистики 466
Linnik Yu. V. Determining the probability distribution by a statistic's distribution 478

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Линник Ю. В. Замечание к теореме Крамера о разложении нормального закона 479
Linnik Yu.V. A remark on Cramer's theorem on the decomposition of the normal law 480
Добрушин Р. Л. Пример счетного однородного марковского процесса, все состояния которого являются мгновенными 481
Dobrushin R. L. An example of a countable homogeneous Markov process all states of which are instantaneous 485
Ибрагимов И. А. Одна теорема из теории безгранично делимых законов . . . 485
Ibragimov I. A. A theorem in the theory of infinitely divisible laws 489

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. Журнал «Теория вероятностей и ее применения» принимает оригинальные статьи и краткие сообщения по теории вероятностей, общим вопросам математической статистики и применениям теории вероятностей в естествознании и технике. Статьи по прикладным вопросам принимаются лишь в случае существенной новизны применяемых метематических методов.

2. Статьи и краткие сообщения печатаются на русском языке с резюме на английском, немецком или французском языках или на английском, немецком, французском языках с резюме на русском языке.

3. Рукопись представляется в двух экземплярах, напечатанной на машинке через два интервала на одной стороне листа с указанием адреса автора. Редакция просит в оформлении цитируемой литературы придерживаться порядка, принятого в журнале.

4. Авторам статей высылаются 50 оттисков.

5. Статьи следует направлять по адресу: Москва В-234, МГУ, Механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, или Киев, площадь Калинина 6, Институт математики АН УССР.

NOTE TO AUTHORS

1. The journal «The Theory of Probability and Its Applications» accepts original articles and communications on the theory of probability, general problems of mathematical statistics and applications of the theory of probability to natural science and technology. Articles of the letter kind will de accepted only if the mathematical methods applied are essentially new.

2. Articles and communications will be published either in Russian with summaries in English, German or French, or in English, German or French with summaries in Russian.

3. All contributions should be sent in two copies, which are typewritten only on one side of the sheet with double spaces. References to books and articles cited should conform to the standard adopted by the publishers.

4. The authors will be sent 50 copies of their articles.

5. Authors are requested to adress their contributions: Moscow, B-234, MGU (State University), Department of Mathematics and Mechanics, or to Kiev, Kalinin Square 6, Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR.

Подписано к печати 12/III—1957 г. Формат бумаги $70\times108^1/_{16}$. Бум. л. 4. Печ. л. 10,95
Уч.-изд. л. 10,2 Тираж 1925 Зак. 1167 Т-00396

2-я типография Издательства Академии наук СССР. Москва. Шубинский пер., д. 10

Цена ~~1~~ р. ~~26~~ к.

116
ЛЕФОРТОВСКИЙ ВАЛ
2.7.6 КОР.9 КВ.43
ЗОЛОТАРЕВУ Т.Л
[illegible]

2-26